昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2014年1月1日発行　第52巻1号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

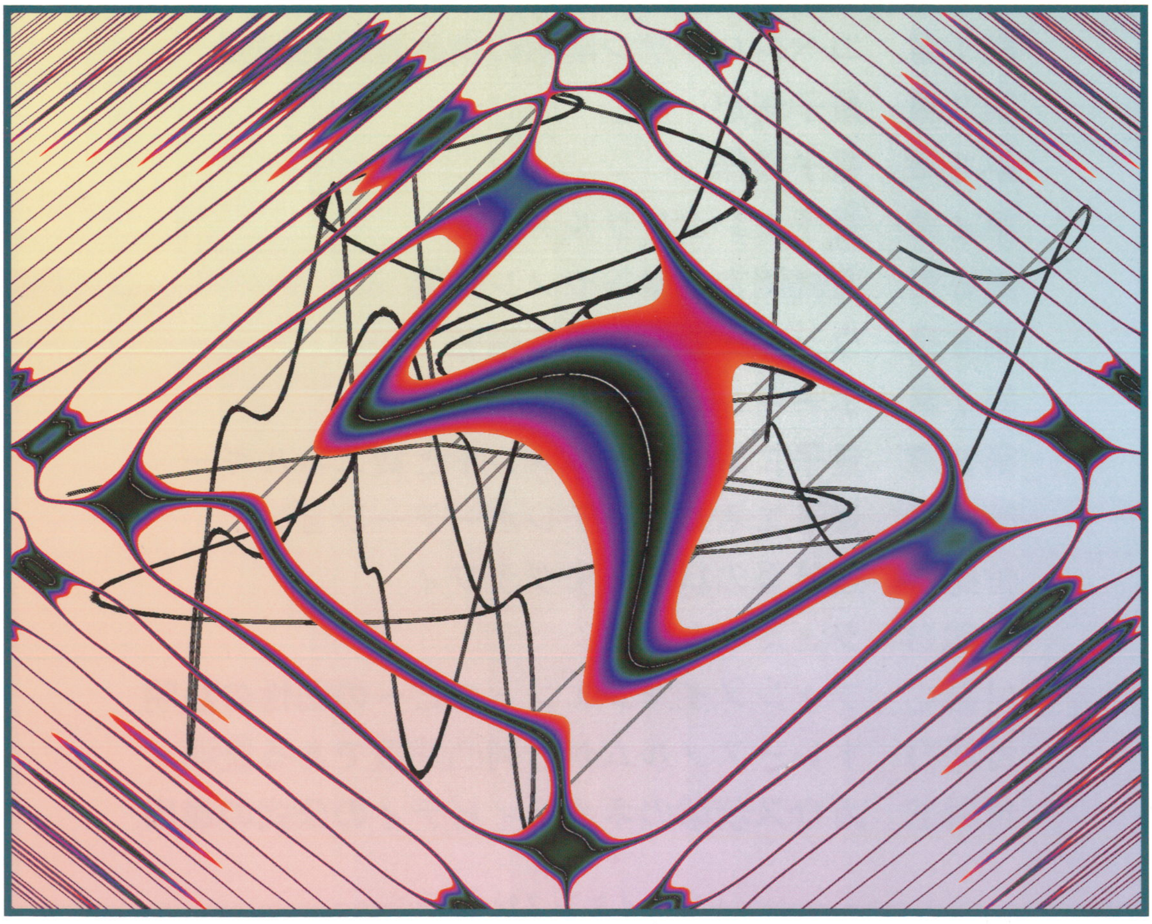
数理科学

1
2014

特集

波と粒子

「光子の裁判」を通して見る量子の不思議



No.607
サイエンス社

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-101：for Senior & Graduate Courses）

統計力学から理解する
超伝導理論

北　孝文　著

本体 2457 円　　送料 290 円　　表示価格は税抜きです

斯学の基礎をその理解に必要な技術も含め余すところなく記述し，熱力学と量子力学をひととおり学んだ学部三四年生や大学院生が自習できるよう配慮した教科・参考書．超伝導を統計力学の問題として理想気体の延長線上に置き，どのような要素がつけ加わり対凝縮と超流動性が生じるのかを順々に明らかにすることを試みるなど，統計力学からの系統的なアプローチを採ることで，固体電子論に詳しくない人にとっても馴染みやすい構成となっている．

第 1 章　熱・統計力学のまとめ
第 2 章　同種多粒子系の量子力学
第 3 章　量子理想気体の統計力学
第 4 章　密度行列と二粒子相関
第 5 章　ハートリー–フォック近似とランダウのフェルミ液体論
第 6 章　引力ポテンシャルと束縛状態
第 7 章　超伝導平均場理論の基礎方程式
第 8 章　BCS 理論
第 9 章　p 波超流動
第 10 章　準古典方程式とギンツブルグ–ランダウ方程式
第 11 章　アブリコソフの磁束格子

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 607 January 2014

波と粒子

「光子の裁判」を通して見る量子の不思議

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間（本誌のみ）11,000円，半年間（本誌のみ）5,500円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2010年/12 省略
2011年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説
2012年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ[物理編]
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想[物理編]
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解
/12〈振動する〉物理
2013年/1 表現論の世界
/2 《量子化》の発想
/3 光と物理学
/4 解析学における様々な発想
/5 次元の作法
/6 発展する統計力学
/7 群と物理学
/8 エネルギーを通して物理学を知る
/9 ボーア
/10 分類する《数理科学》
/11 理論物理と実験物理の交錯
/12 物理学における存在とは

数理科学臨時別冊一覧

12年/7 弦の場の理論
12年/9 超弦理論の応用
12年/10 複素多様体論講義
12年/11 幾何学の量子化
12年/12 量子力学から超対称性へ
13年/1 行列解析ノート
13年/4 無限量子系の物理と数理
13年/7 現代宇宙論講義
13年/8 クォーク・ハドロン物理学入門
13年/9 統計力学から理解する 超伝導理論
13年/12 量子力学ノート

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店八王子店
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂池袋本店
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
MARUZEN 多摩センター店
ジュンク堂吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂盛岡店
丸善津田沼店
ジュンク堂新潟店
ジュンク堂甲府岡島店
MARUZEN & ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂京都店
ジュンク堂三宮店
ジュンク堂三宮駅前店
ジュンク堂大分店
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN 広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂旭川店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂仙台本店
ジュンク堂秋田店
ジュンク堂郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

——大学生協・売店——

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北1店）
九州大学（理系）

January 2014 MATHEMATICAL SCIENCES Number 607

特集／波と粒子

巻頭言

細谷 暁夫

「光子の裁判―ある日の夢」[1)]は朝永振一郎が1949年に発表したヤングの2重スリットの実験を裁判仕立てにした作品である．この一見初等的な物理が量子力学の本質を突いたものであることは，ファインマンをはじめ多くの人が指摘している．

その作品の初版が雑誌「基礎科学」であり，朝永振一郎自身が編集長であったことは，島田一平氏の記事ではじめて知った．原作を読むと，物理学者として細心の注意を払って書かれていることに気づく．例えば，「波」，「波動」という言葉は直接出てこない．あくまで検証可能な事実だけで組み立てられている．僅かに，被告の姓名「波乃光子」を漢文読みすると「波すなわち光子」と読めるところに潜んでいる．

ヤングの2重スリットの実験において，光源を弱めて1回の実験で1個の光子しか出ないようにすると，後方のスクリーン上の輝点は1個であるがその場所は実験ごとに異なる．多数回の実験結果を重ねて見ると干渉縞が見える．故外村彰氏はそれを電子の場合に見事に見せた．その実験にも参加した江沢洋氏の証言は生き生きとしている．さらに，「光子の裁判」において想定されている測定について警官による捕捉を取り上げ，どこまでが量子力学における測定なのかと，問題提起もされている．この二方の記事から原作の輪郭が描けるのであるが，もちろん原作を読まれることを切にお勧めしたい．

また，この作品は文学作品としても通用する．演出家の渡辺美帆子氏は原作をいくつかのバージョンで戯曲化した．氏は「光子の裁判」にある不可思議さにも関わらずそこにある真実を志向する内容に感動されている．島田氏の記事にあるように，劇を鑑賞すると「光子の裁判」についての理解が深まることに驚く．光子になったつもりで体を動かしてみると，それまで見落としていたポイントに気づく．

裁判劇の中で行われる実験にもあるように，光子が上下どちらのスリットを通ったか知ることとスクリーン上に干渉縞が出てくることは相容れない．それを物理的に言うと，光子の経路の状態と運動量がエンタングルしていることにポイントがあり，測定過程は直接的に関係しない，という現代的理解について高木伸氏の解説がある．そう理解すると，C_{60} のような大きな分子でさえも干渉を起こすことが理解できる．物理学者でも知らなかった人もいるのではないだろうか．しかしながら，小澤正直氏は一歩進んで測定誤差（氏の用語では事後相関誤差）と干渉度の関係を，不確定性関係の最近の理解に基づいて議論している．

ヤングの2重スリットの実験は，マッハ・ツェンダー干渉計をその代表として，光学実験においては至る所に見られる．しかし，「光子の裁判」で問

われているのは，あくまで単体としての光子である．それに対応した実験をするには，単一光子源が必要になる．枝松圭一氏の記事によれば，それが可能になったのは「光子の裁判」出版以後ずっと後になってからであった．氏の記事では光子の経路と干渉縞の相補性について遅延選択などのより深い理解を必要とする実験も紹介されている．上にも述べたが，この相補性はエンタングルメントからくる．

実験家である仙場浩一氏は，C_{60} よりもさらに巨視的な量子系の重ね合わせについて氏の超伝導磁束量子ビットに関する最近の実験を交えて紹介している．

さらに，宇宙空間における「光子の裁判」現象も，今のところ報告はないが，コヒーレンスさえ保証されていれば原理的にはあり得る．南部保貞氏は宇宙初期における量子揺らぎに焦点を当てて最近の研究を紹介している．

「光子の裁判」については，専門家にすでに知られていることの理解に役立つ教育的なものに留まらない．量子力学の基礎的問題，例えば，弱値問題など今なお光をあて続けている．飯沼昌隆氏のコラムで最近の実験状況に触れてもらった．

この特集を読み返してみて，とあることに気づいた．量子力学を実験と理論を比較するマニュアルと割り切れば，そもそも不思議さはどこにも起こりようがない．ちょうど計算プログラムが機械語で書かれているようなものである．計算プログラムの流れを理解し易くするには，FORTRAN のような上位の言語が有用であるが，それと同じことを量子力学で行うといかにも奇妙な結果になることがある．「光子の裁判」がその典型である．量子光学の実験家は，あるデバイスで干渉縞ができるかどうか実験する前に判定するときに，よく光子がどっちから来るか分からない仕組みになっていることを確認する．光学回路から計算して求めても同じことになるはずであるが，ずっと賢いやり方であろう．しかし，そうすると，「光子の裁判」のようなことが起こってしまう．他の量子の不思議も上位の言語を使おうとするところから起きているように思える．

参考文献

1) 朝永振一郎著，江沢洋篇『量子力学と私』p.285（岩波文庫，1997 年）．

（ほそや・あきお，東京工業大学名誉教授）

「光子の裁判」と量子の不思議

江沢　洋

1. 光子の裁判から

図 1 は朝永先生の「光子の裁判」[1)] の第 7 図である．この家で光子の振舞いの実地検証が行われたのだ．被告である光子は門 M で門衛につかまって入門手続きをさせられた後，家の中に向けて放たれ，うまく室内に入ったと思ったら家の奥の壁に並んだ警官たちの一人に捕獲された．そして，捕獲の位置 x がカードの上に黒丸でいちいち記録された．何百回となく繰り返された記録の集積が図 2 である．

このカードには Neither A nor B という記号がついている．それは，部屋の中仕切りの窓のところには警官がいなくて，A, B どちらの窓でも光子は捕えられていなかったということを意味する．

この Neither A nor B（A でも B でもない）のカードに記録された黒丸（警官が被告を捕えた位置）は奇妙な縞模様を呈している．

実は，この検証の前に，中仕切りの窓のところにも警官を配置して，被告が A, B どちらの窓を通ったかを確認した検証が行なわれた．もちろん，被告は窓 A で捕えられれば窓 B で捕えられることはなく，B で捕えられれば A で捕えられることはない．そこで，この場合に奥の壁のどこで捕獲されたかを記録したカード（図 3）には Either A or B（A または B）という記号がつけられている．このカードの黒丸の並び方は，図 2 の並び方と著しくちがう．Neither A nor B の縞模様は何を示しているのだろう？

光は波であるというから，図 2 の縞模様は 2 つの窓 A, B を通って奥の壁にきた光の波の干渉によるとも考えられる．しかし，その模様が点の集

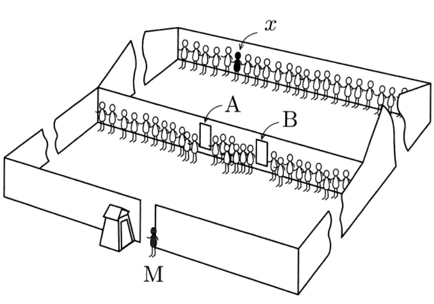


図 1　実地検証の行なわれた家[1)]．中仕切りと奥の壁には警官が並んでいる．しかし，Neither A nor B の実地検証では中仕切りの窓のところに警官はいない．

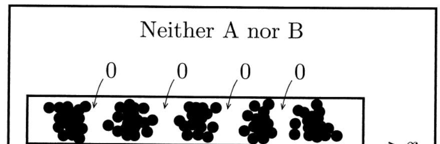


図 2　カード Neither A nor B[1)]．

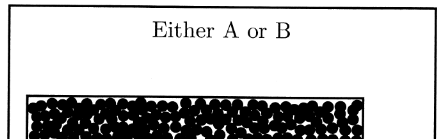


図 3　カード Either A or B[1)]．

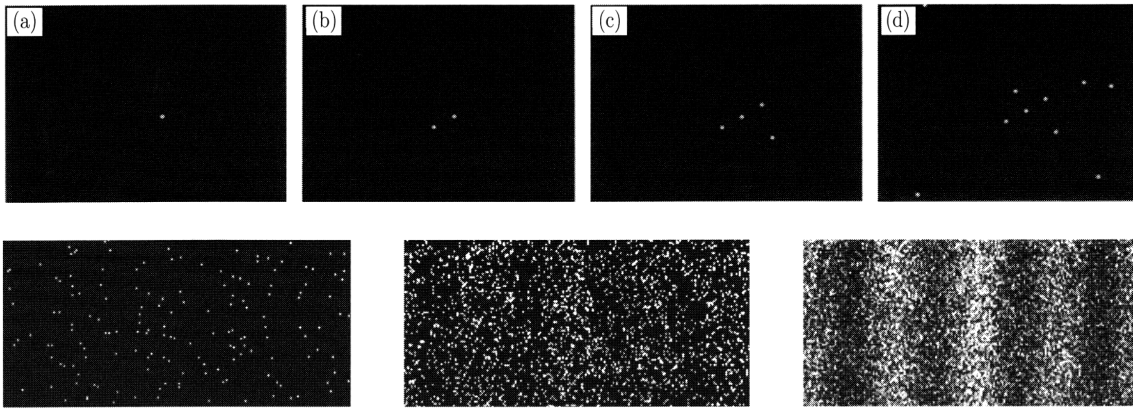


図 4　電子の裁判の実験で検出された電子の到達位置を記録した写真（文献 4）より（上段：本文 p.66，下段：口絵 p.7））．(a) は最初の電子が検出器に到達したとき．それから次々に到達する電子の位置を記録に加えてゆく．始めのうちは電子の到達する位置はランダムに見えるが，記録される電子の数が十分に増えると縞模様が現れる．縞と縞の間（図 2 では 0 と印したところ）には，始めから電子はきていなかったのだ．

まりである点が気になる．そして窓 A, B のところで光子を一たん捕獲したら，直ちに放したにもかかわらず模様が図 3 のように変わったというのも奇妙である．

朝永先生が，この物語を書いた 1949 年から 30 年以上たって Neither A nor B の実験が光子を用いて行われた[2)]．それから数年の後，電子についても同様の実験が行なわれた[3)]．いずれの場合にも，朝永先生の予想したとおりの点々からなる奇妙な縞模様が得られたのだ！

ここでは，ぼくも関係した電子の実験について話そう．

2. 電子の裁判—Neither A nor B

図 4 が 1989 年に実際に行われた電子の裁判の実験において，光子の裁判について朝永先生のフィクション[1)]に出てくる図 2 に相当する写真である．

この実験では，電子をポツリポツリと送り込んで，検出器に最初の電子が到達したときの写真が (a)，それから (b)，$\cdots$，(d) と到達する電子が増えてゆく様子を次々の写真が示している．電子の到達する位置 x は，始めのうちランダムに見えるが，電子の数が十分に増えたとき，朝永先生のフィクション（図 2）と同様な縞模様が現れている．

2.1 実験はこうする

実験は，おおまかに言って図 5 のような装置（電子顕微鏡）で行なわれた．図の一番上に見えるのが電子銃で，その先端の尖った針とその下の第 1 陽極との間に電圧 $V_1 = 3 \sim 5\,\mathrm{V}$ をかけて針先から電子を引き出し，第 2 陽極との間にかけた $V_0 = 5 \times 10^4\,\mathrm{V}$ で電子を加速する．電子の電荷を $-e$，質量を m とすれば，電子の運動量の大きさは

$$p_z = \sqrt{2meV_0} = 1.21 \times 10^{-22}\,\mathrm{kg\,m/s} \quad (2.1)$$

となる．その下にある電子レンズは，電子の運動量の向きをそろえるためのものである．顕微鏡の軸を z 軸とし，下向きを正とする．

運動量が p_z にそろった電子はバイプリズムに飛び込む．バイプリズムというのは接地した平行な金属板（間隔 $2b$，$b = 5\,\mathrm{mm}$）の中央に細い（半径 $a = 0.5\,\mu\mathrm{m}$）導線を張り，これを電位 10 V にしたものである．電子は導線に引かれ，導線の右側を通った電子は左向きに，左側を通った電子は右向きに運動量を得る．すなわち，運動量の x 成分

$$\mp p_x, \quad \begin{Bmatrix} x > 0 \\ x < 0 \end{Bmatrix} \text{の側を通ったとき．} \quad (2.2)$$

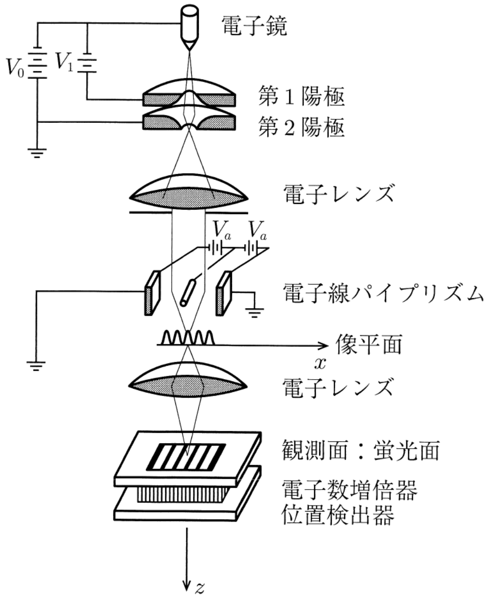


図5　実験装置．

を得るのである．計算によれば

$$p_x = 4.1 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg\,m/s} \tag{2.3}$$

である．x 軸は図 5 でいって z 軸に垂直に右向きにとる．この電子線バイプリズムが図 1 の中仕切りの 2 つの窓の役をする．ただし，いまは Neither A nor B の実験をしたいので，電子がどちらの窓を—導線のどちら側を—通るかはチェックしない．

そうすると，バイプリズムの下の像平面に，そこに到達する電子の数が増えるにつれ，図 4 に示したような縞模様が現れてくる．実は，像平面に現れる縞模様を写真に撮るにはなお多少の手続きが必要なのだが，それは後の話としよう．

2.2 電子の波動性

像平面に縞模様が現れる理由を，量子力学は次のように説明する．電子は波動性をもっており，運動量 $\boldsymbol{p} = (p_x, p_z)$，エネルギー E の電子は

$$\psi_1(x,z,t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_z z) - \frac{i}{\hbar}Et\right] \tag{2.4}$$

のように振る舞う．

バイプリズムの導線の両側を通ってきた波が，重なるところでは

$$\psi(x,z,t) = \left\{ \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_z z)\right] + \exp\left[\frac{i}{\hbar}(-p_x x + p_z z)\right]\right\} \times \exp\left[-\frac{i}{\hbar}Et\right] \tag{2.5}$$

となる．

これらの式について，説明を補っておこう．$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ であることは御存知としよう．このうち $\cos\phi$ に注目すれば—$\sin\phi$ でも同じことであるが—z' 方向に進む波長 λ，振動数 ν の波動は

$$\psi_c(x', z', t) = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z' - 2\pi\nu t\right) \tag{2.6}$$

と表わされる．量子力学によれば，運動量 $\boldsymbol{p} = (0, p'_z)$，エネルギー E をもって運動する粒子には波長 $\lambda = h/p'_z$，振動数 $\nu = E/h$ の波動が伴う．h はプランクの定数である．(2.6) を運動量とエネルギーで書きかえれば

$$\psi_c(x', z', t) = \cos\left(\frac{p'_z}{\hbar}z' - \frac{E}{\hbar}t\right) \tag{2.7}$$

となる．

いま，z' 軸から図 6 のように角 θ だけ回転した z 軸をもつ座標系 (x, z) では $z' = x\sin\theta + z\cos\theta$ となるから，この座標系から波 (2.6) を見ると

$$\begin{aligned}\psi_c &= \cos\left(\frac{1}{\hbar}\{p'_z(x\sin\theta + z\cos\theta)\} - \frac{E}{\hbar}t\right)\\ &= \cos\left(\frac{1}{\hbar}(p_x x + p_z z) - \frac{E}{\hbar}t\right)\end{aligned} \tag{2.8}$$

に見える．これが (2.4) に相当する式である．

2.3 電子の位置の観測

与えられた紙数が尽きてきた．以下，駆け足になる．電子の波動が (2.5) である場合，電子の位置の観測をすると範囲 $(x, x+dx)$ の値値が確率 $P(x)dx$ で得られると量子力学はいう．ここに，(2.5) の $\psi(x,z,t)$ を用いて

$$P(x) = \left(\frac{N}{2}\right)^2 |\psi(x,z,t)|^2 = N^2 \cos^2 \frac{p_x x}{\hbar} \tag{2.9}$$

で，N は電子の波が存在する範囲 $(-A, A)$ に

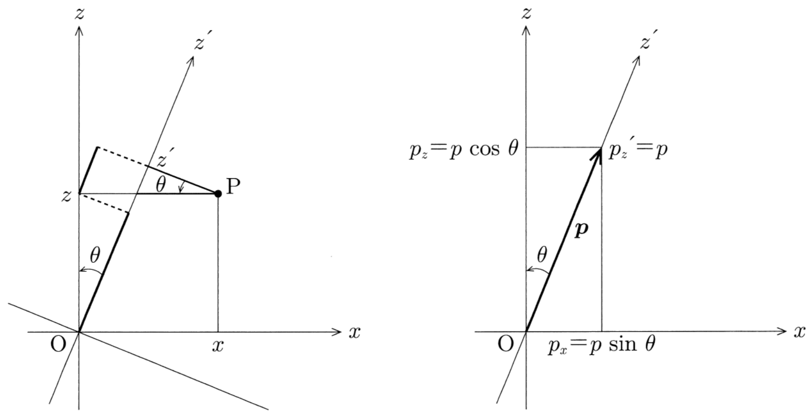


図 6 z' 方向に進む波を，角 θ だけ回転した座標系 (x, z) から見る．(a) 点 P の座標はどう見えるか？ (b) 運動量の成分はどう見えるか？

わたる (2.9) の積分が 1 となるように定める．$\cos^2(p_x x/\hbar)$ の大きいところが縞になる．そして，電子は一たん位置 x に見いだされると，電子の波はその位置に収縮して（波束の収縮），その観測の直後に再び位置の観測をすると同じ値 x が得られる．これも量子力学の主張である．

こうして，電子が見いだされる位置の確率が大きい縞の間隔は

$$D = \frac{\pi\hbar}{p_x} = 8.1 \times 10^{-8}\,\mathrm{m} \qquad (2.10)$$

となる．実は，外村らの実験[3]では，電子顕微鏡の性能を利用して像平面の (2.9), (2.10) を 2000 倍に拡大してから図 5 の観測面で観測している．

では，この場合の観測とは何か？ 外村らの観測装置は図 5 のようなもので，観測面に蛍光板をおき，電子の到達位置から光が出るようにしてある．観測の常として，続いて増幅過程がくる．すなわち，蛍光板から 1 個の光子が出ると，それを光電面に受けて電子に変え，3000 V の電圧で加速して電子数を 10^7 倍まで増殖した上で位置検出器に導いている．そこで電子数はさらに 100 倍され，位置が検出される[4]．位置の観測が行なわれるのは，この増幅過程の前で，蛍光板から 1 個の光子が出たときとすべきだろうか？ そうだとすると，朝永先生のフィクション（図 1）で奥の壁に並んだ警官たちは，外村たちの実験では蛍光板の蛍光粒子たちということになる．こうして電子の到達位置は位置検出器の与える点の集まりとして表示され，点の密度は (2.9) に従って縞状になる．

3. Either A or B の実験

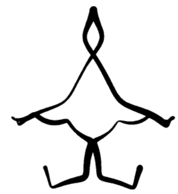
これは，まだ行われていないが，もし行われたとすると，窓 A, B のところで電子の位置を観測するので，電子の波は A または B で波束の収縮をおこし，それまでもっていた運動量の情報を失ってしまう．そのために図 4 の像平面に，したがって観測面に到達する位置は A からきた電子の分布と B からきたものの分布の和になるであろう．このことはファインマンがはっきり述べている[5]．

参考文献

1) 朝永振一郎「光子の裁判」，所収：『量子力学と私』，江沢洋編，岩波文庫（1997）；『物理学への道程』，江沢洋編，みすず書房（2012）；そのもとは「基礎科学」，弘文堂，（1949 年 11, 12 月号）．
2) Y. Tsuchiya, E. Inuzuka, T. Kurono and M. Hosoda, 所収：P. Hawkes ed., *Advanes in Electronics and Electron Physics*, Academic Press, **64 A** (1982).
3) A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki and H. Ezawa, *Am. J. Phys.* **57** (1989) 117.
4) 外村彰『目で見る美しい量子力学』，サイエンス社（2010）．pp.64–68.
5) R.P. ファインマン『物理法則はいかにして発見されたか』，岩波・現代文庫（2001）．pp.192–227.

（えざわ・ひろし，学習院大学名誉教授）

名作「光子の裁判」レビュー
初めて読む人のために



島田　一平

1. はじめに

「光子の裁判—ある日の夢—」は一編のミステリー小説としてもなかなか読み応えのある作品です．真の犯人を推測するのに十分な材料が用意されていながら，そうやすやすとは結末を予測できません．量子力学の解説としては，波や粒子といった古典的表象をあまり表に出さず，徹頭徹尾，測定装置による観測とその結果の統計的解析について語る，という独特なものになっています．

そこで行われるのは，事実に基づいた論理的な推論です．このような物語を通して，読者が量子力学的な実在というものをどの程度を把握できるのか，その想像力が試されます．

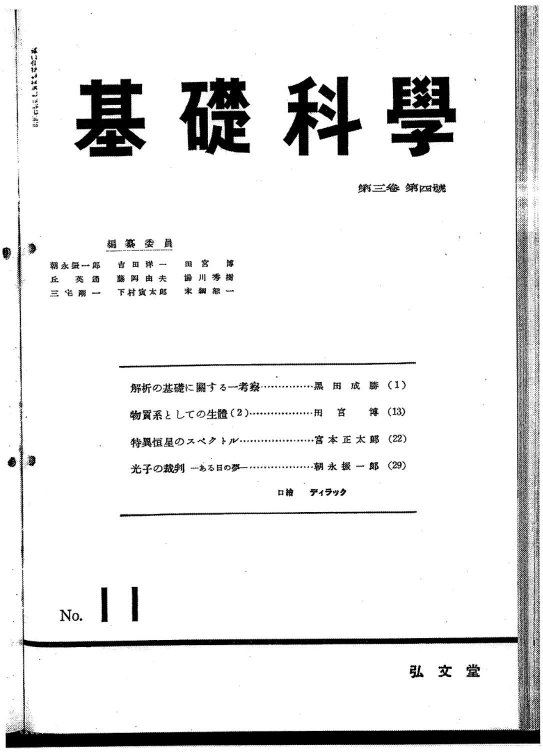
筆者は，量子力学になじみのない若い人たちが，この物語を舞台化しそれを演じるという現場に立ち会う機会を得ました．そこでの経験を交えながら，この名作について紹介してみます．

2. 波乃光子がそこにいるということ—事実（**Facts**）

裁判ではすべてを事実に基づいて審議します．劇の冒頭のシーンで，門衛と波乃光子の証言（門衛：「つかまえた」，波乃光子：「つかまえられた」）が一致したことをもって，これを事実としています．この物語ではすべてこの種の事実，「波乃光子が発見者（門衛，部屋の中の男，警官）によってある場所でとらえられた」から成り立っています．とらえられるのはいつも波乃光子という同一人物です．波乃光子の一部分がとらえられることはなく，常に波乃光子の全体として現れます．波乃光子が同時に異なる場所でとらえられることはありません．

波乃光子に関係するもう一つの要素は，中庭と室内を隔てる，窓の開いた壁です．波乃光子はこの窓を通ってしか部屋に入れないことが，暗黙に了解されています．壁の反対側で波乃光子をとらえることで，壁の効果は事実として確認できます．窓付きの壁はそれが存在するだけで，波乃光子に影響を与えます．

次に，発見者の存在が波乃光子に与える影響について考えましょう．結論から言うと，発見者の存在はとらえられる前の波乃光子には影響を与えない，とらえられた後の波乃光子はそれによって影響を受ける，ということです．物語の中で検察官が「発見者をあらかじめ配置しただけで，そのことを波乃光子が事前に知って，その行動を変えたのではないか」という疑問を提出する場面があります．これに対して，弁護人は，「仮に，発見者の存在を事前に知られないような方法で波乃光子をとらえるということができたとしても，波乃光子が実際にとらえたことによる影響がさけられない以上，とらえられる前の波乃光子の状態をとらえたことの影響によって乱されてしまっている波乃光子の状態と同一視することはできない」と反


基礎科學

第三卷 第四號

編纂委員

朝永振一郎　吉田洋一　田宮博
丘英通　藤岡由夫　湯川秀樹
三宅剛一　下村寅太郎　末綱恕一

No. 11

弘文堂

「光子の裁判」が最初に掲載された雑誌「基礎科学」[2]の目次.

論します．この微妙な議論にすぐには納得のできない方は，発見者の波乃光子に対する影響というものを上のように定める約束であるとして，続きを読んでください．

発見者についての上で述べた二つの約束を使うと，発見者によってとらえられた直後の波乃光子についてある程度のことが分かります．物語の後半に出てくる検証実験の一つに，中庭と室内に警官をまんべんなく配置して，波乃光子をとらえては放すことを繰り返すという，とても印象的なものがあります．この様子をみていると，ある場所でとらえられた波乃光子がその次にとらえられるのはその直前にとらえられた場所の近くであって，そこから遠く隔てられた所でとらえられることはないようです．“近く”といっても可能な場所はいろいろあり，そのうちのどこでとらえられるかは確定していません．発見者の存在はその発見者がとらえる前の波乃光子には何の影響も与えていないのですから，2度目にどこでとらえられるかということは，最初にとらえられた直後の波乃光子の状態を素直に反映しているはずです．したがって，ある場所でとらえられた直後の波乃光子は“その場所の近くでとらえられる可能性の高い”ある状態にあるといえます．

このことの当然の帰結として，波乃光子が次々にとらえられる場所の集合は，枝分かれすることのない一続きの経路になります．このような経路が窓を通過する場合，どちらか一方のみを通過するものとならざるを得ません．また，枝分かれすることのない一続きの経路といってもそれにはいくつもの可能な経路があり，こうした実験を繰り返すたびに実際に観測される経路は異なっているのが普通です．一続きではあるものの，くねくねと折れ曲がった，ずいぶんと複雑な経路となる場合もあり得るわけです．

検証実験は，毎回，門衛が波乃光子をとらえそれを解き放つということで開始されます．これは，“門の近くでとらえられる可能性の高い”状態にある波乃光子について実験するという，実験対象の初期化であったのです．

これでこの物語を構成するすべての要素が出そろいました．裁判で問題となるのは，事件当日の被告の行動についての被告自身による証言「私は二つの窓の両方をいっしょに通って室内に入った…」の真偽です．

3. 何度も試してその数を数える (Number)

いよいよ謎解きです．場面は法廷における論争から，波乃光子がとらえられ，解き放たれ，またとらえられる，という，華やかなパフォーマンスへと変わります．

当初，この場面（そこでは台詞が一切ありません）を演劇として表現するのはかなり難しいと思いました．予想に反し，演出家はいきなりこの部分に取り組み始め，試行錯誤の末に完成させました．舞台を見た多くの人は，この場面に強く印象づけられたようです．言葉によるやりとりという

形式を越えた演劇の可能性を感じました．

波乃光子をとらえたという事実から答を引き出そうとするとき，問題なのは結果の不確定性です．門衛にとらえられ，そこで解き放された波乃光子が，あっちの警官に捕まったかと思えば，次回の実験では，こっちの警官に捕まる．波乃光子はまったく気まぐれに振る舞っているようにも見え，これら個々の事実から何かを判断することはできません．そのとき，弁護人が指示したのは，同じ実験を何度も繰り返し，その結果を集めて平均を計算することでした．

同じ条件の下で何回も実験をし，その結果から平均を求めると，その平均値は確定的になるのが普通です．つまり，多数回の実験をもう一度繰り返し，その結果の平均値を求めると前回の平均値と同じになります．個々の結果が不確定な場合に，平均値という確定的な指標を使って何かを判断しようというのは統計学の手法です．19 世紀の統計学者にケトレーという人がいますが，ケトレーの考えた有名な概念に「平均的な人間」(l'homme moyen) というのがあります．弁護人は一定の実験条件の下で多数回の実験を繰り返し，その条件の下での平均的な波乃光子をとらえようというのです．

実行されたのは次のような実験でした．

1. 門の所でとらえられた波乃光子を二つの窓のある壁の向こう側でとらえる．
2. 門の所でとらえられ，かつ，どちらかの窓の所でとらえられた波乃光子を壁の向こう側でとらえる（この場合の結果は，窓 A でとらえられた場合の結果と窓 B でとらえられた場合の結果の合併です）．

実験結果の集計をしていく過程はなかなかの見物です．個々の結果は一見何の規則性もなくばらばらに出てくるのですが，集計する数が増えていくにつれて，だんだんと，そして最後にははっきりとした一定の傾向を示すようになるのです．そして，驚くべきことに，両方の窓を開けたときの平均と，どちらか片方の窓でとらえられたときの平均とがはっきりを違った傾向を示します．両方の窓を開けたときの，場所ごとの波乃光子の捕獲率（1 回の実験で波乃光子がとらえられる回数（0 か 1）の平均値）にははっきりとした周期的な変動が見られ，波乃光子がまったくとらえられない場所さえ存在するのです．これに対して，どちらか一方の窓でとらえられたときの平均は場所によらず一定の値を示します．これらの事実から，「両方の窓が開いている場合に波乃光子はどちらか一方の窓を通った」という主張は否定されることになります．

とらえられるときは一人であり，かつ，二つの窓のどちらか片方だけを通ることはできない，という結論は，波乃光子という存在が，我々が日常生活で経験したことのない新しいものであることを示しています．この結論を導くときに，弁護人のしたことは，起こった事実の数を集計するということだけです．チャールズ・ディッケンズの小説『困難な時代』の中で登場人物の一人グラッドグラインド氏が子供たちにこう言っていました——Facts and number，これ以外は決して信じるな——．そして，ディッケンズその人はケトレーのいう「平均的な人間」というものをひどく嫌悪していたふしがあります．

4. 想像力をはたらかせる（Fantasy）

我々の日常経験とは異なる新しい存在——弁護人は最後の場面で，こうした波乃光子の存在様式について以下のような発言をします．

とらえられていないときの波乃光子の状態は“無限次元複素空間のベクトル”であらわされる．窓 A を通る波乃光子の状態を表すベクトルを Ψ_A，窓 B を通る波乃光子の状態を Ψ_B とするとこれらの二つのベクトルは互いに“直交している”．両方の窓をいっしょに通る波乃光子の状態はこれら二つのベクトルの“重ね合わせ $\Psi_A + \Psi_B$”で表される．これらのことについては私の書いたよい教科書があるからそれを読んでもらいたい．仁科，朝永，玉

木，小林らによる日本語訳もあり，名訳と評判である．自分の名前が出てきて，びっくりした私は，はっと夢から目覚め，読みかけの本の上で眠りこけていた自分に気がつく．その本はディラックによる『量子力学』であり，開かれていたページには

——その一つの光子は，入射光線から分たれた二つの成分の何方へも，部分的に入って行く，という風に描述しなければならぬ．——

という言葉が書かれていた．

ここでこの物語は終っています．

作者朝永氏は別の著作において，このような数学の援用を“Fantastic な記述”と評しています（「量子力学的世界像」）．あわれなグラッドグラインド氏は，サーカスの娘シシーのいだく空想（Fantasy）の力によって人生のまっとうな道を悟るしかない，ということなのでしょうか．

しかし，これは何とも不親切な結末に感じられます．この最後の場面にきて，それまでの綿密にしくまれてきた話の流れが，ぷっつりと断ち切られてしまっています．作者はなぜ作品の最後で，量子力学の数学的体系をほのめかしたのか？ 以下では，この点について考えてみます．

朝永氏は，既存のどの描像にもあてはまることのないまったく新しい世界像というものについて次のようにも述べています．「自然がこういうものの存在をしめした以上，我々は幼児が己のまわりにある物についての概念を構成して行くときのように，この概念を作らねばならないし，又それは可能であろう．」（「量子力学的世界像」）粒子や波といった概念は，その数学的な形式に接する以前に我々はそれを理解していて，後から学ぶ数学形式はそれを表現したものだと感じることができます．未来の人間にとっては，量子力学の数学形式についても，同じように感じるようになるのではないか．著者が最後に唐突に数学形式を持ち出した背景にはそのような期待がこめられているように思えます．

実際，私が接した若い人たち（特に量子力学を勉強したことない人たちです）は，この物語を舞台化し，それを演じることを通して，波乃光子の全体像について何かをつかんだようでした．波乃光子について物理学科の学生以上の鋭い指摘をするようになったのです．このような若い人たちにとって，自分たちの将来というものはそのときにならなければわからない，というのが当り前であって，初期条件によって将来が運命的に決定されるなどということはものすごく理解しづらいそうです．むしろ，波乃光子の示している世界のほうがしっくりとくるようなのです．

この物語では「x で波乃光子がとらえられる」という事実を集めることで，波乃光子についてのある言明の真偽が決定されました．このような方法から，波乃光子についてのすべての言明の真偽を決定するには，どれだけの事実を集めれば十分なのか？ という問いかけが自然にうかんできます．位置 x の測定結果の集団は，ある意味で不完全で，さらに確率振幅についての位相の情報も必要です．これらのことは，コヒーレント状態を固有状態とする正定値演算子集合の測定（伏見関数の決定）で実行でき，それは位置と運動量の測定をある意味での弱い測定と通常の射影測定という形で逐次的に組み合わせることでも可能なことがわかっています．この作品の書かれた当時，これらのことがどの程度議論されていたのかは疑問ですが，この物語はこの時期として先見的な問題提起をしていたと言えます．

5. まとめ

「光子の裁判」での量子力学的実在の取扱いは，波や粒子という概念を極力排除するという方針でなされていて，通常の歴史的解説とはかなり異なったものです．物理学の訓練を受けてしまったものには，むしろ，理解しにくいと感じられます．一方，量子力学にはなじみのない若い人たちは，この物語を演じるという体験を通してそこから何かをつかみ取ったようです．量子力学的実在を表現する，何かもっと直接的な方法の可能性を暗示し

ています．この点において，この物語は他の多くの量子力学の解説とは一線を画する斬新なものといえます．

6. 謝辞

この記事は，2010年4月に開催された日本大学量子科学研究所公開講座「光子の裁判」での経験がもとになっています．舞台の脚本，演出を担当した渡辺美帆子さん（渡辺美帆子事務所／二十二会）と彼女の率いていた演劇仲間の方々にはたいへんお世話になりました．そのときの舞台はその後も改訂されながら，いくつかの場所で上演され，それを見たたくさんの人から貴重な反応をいただきました．この場を借りてこれら多くの方々に感謝の気持ちを表したいと思います．

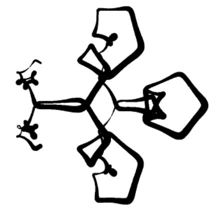
参考文献

1) 朝永振一郎：「量子力学的世界像」，「基礎科学」第**1**巻1号（1947年）．
2) 朝永振一郎：「光子の裁判―ある日の夢―」，「基礎科学」第**3**巻4，5号（1949年）．
3) Adolphe Quetelet: “Sur l’homme et le développement de ses facultés, ou Essai de physique sociale”, 2 volumes (1835).
4) Charles Dickens: “Hard Times: For These Times” (Weekly serial in *Household Words*, 1 April 1854, to 12 August 1854).
5) 市東拓郎，島田一平：「負の確率の問題の伏見関数を用いた解析」，日本物理学会 2010年秋（26aTE-5）．
6) T. Shito: “The Husimi function and a successive measurement of the position and the momentum”, arXiv:1211.3274.

（しまだ・いっぺい，日本大学量子科学研究所）

現代からみた「光子の裁判」と測定の問題

最新 量子測定問題



小澤　正直

1. 不確定性原理と相補性原理

1927年に**不確定性原理**を提唱したハイゼンベルク[1]は，その記念すべき論文の中で，古典力学との比較で量子力学の特異性を次のように述べている．量子力学的粒子は，任意の時刻において，

(H1) その位置の値，つまり，空間のどの点にいるかということを定めることができ，

(H2) または，その運動量の値を定めることができるが，

(H3) その位置と運動量の値を二つとも一緒に定めることはできない．

上の (H1) および (H2) から量子力学では古典力学と同様，「位置」と「運動量」という 2 種類の物理量が存在することが導かれる．

ところで，古典力学の考えからいえば，位置と運動量とをいっぺんに定める手段がないとしても，まず，位置を定め，その後，直ちに運動量を定めれば，結果的にその両者を定めたことになるのではないかと考えられる．しかし，そのことが可能だとすれば，(H3) は成り立たなくなってしまうので，

(H4) 量子力学的粒子は，ある時刻において，その位置の値を定めると，その時刻の直後の運動量の値が不可避に乱されてしまう

と考えざるを得ない．ハイゼンベルクは，このことの典型的な仕組みをガンマ線顕微鏡の思考実験で明らかにして，量子力学的粒子の任意の時刻における位置の値と運動量の値を共にある誤差の範囲で定める場合の平均誤差をそれぞれ，$\varepsilon(Q), \varepsilon(P)$ とし，プランクの定数を h とすると，

$$\varepsilon(Q)\varepsilon(P) \geq \frac{h}{4\pi} \quad (1)$$

という関係が一般的に成り立つと推量した．また，位置の値を平均誤差 $\varepsilon(Q)$ で定めるときに運動量の値が平均的に $\eta(P)$ だけ乱されるとすると，乱された直後の運動量の値を定めることにより，乱される前の運動量の値を平均誤算 $\varepsilon(Q) = \eta(P)$ で定めることができる．よって，式 (1) から

$$\varepsilon(Q)\eta(P) \geq \frac{h}{4\pi} \quad (2)$$

が導かれる．これらの関係式 (1), (2) は，ハイゼンベルクの不確定性関係と呼ばれてきた．

ところで，ハイゼンベルクから不確定性原理について知らされたボーアは，量子力学に関する独自の解釈である**相補性原理**を提唱して，「不確定性原理は，相補性原理の一つの現れである」と主張した[2]．ただし，相補性原理がどういう原理なのかということを説明することは難しい．ここでは，不確定性原理との対比で，次のような考え方であると述べるにとどめよう[*1]．量子力学的粒子は，任意の時刻において，

(B1) ある文脈では，その位置の値，つまり，空間のどの点にいるかという性質を持ち，

(B2) 別の文脈では，その運動量の値を持つが，

(B3) それぞれの文脈から独立に，その位置の値と運動量の値が一緒に定義されることはない．

ここで使われた「文脈」という言葉については，次節で解説を与えよう．

---

*1) ボーアの相補性原理に関する最近の研究成果を交えた解説については，文献 3) を参照されたい．

■ 2. 相補性原理から不確定性原理が導かれるか？ ■

(H1)–(H4) と (B1)–(B3) を対比すると，不確定性原理が物理量の値の測定可能性に言及しているのに対して，相補性原理は物理量の値の定義可能性に言及しているといえるだろう．それに関連して，朝永は，以下のように述べている．「素粒子とは，その位置がこれこれであるという文の主語になれるし，またその運動量がこれこれであるという文の主語にもなり得るが，この二つの文を『かつ』ということばで結合させた文の頭には来られないようなものである．」[4]

ボーアの相補性原理とは，位置に関する性質のみを考えたり，運動量に関する性質のみを考える場合は，古典物理学や古典的数学に基づいた古典的な推論が正しく使えるが，位置と運動量の性質を結合させた性質に関しては，そうではないということを意味する．

そこで，位置に関する性質の全体，または，運動量に関する性質の全体を一般に**文脈**と呼ぶ．これらは，それぞれ，粒子性に関する文脈，波動性に関する文脈と呼ばれる．すると，量子力学的粒子の性質は二つの異なる文脈，つまり，粒子性と波動性に分離されることになる．与えられた状況における文脈の選択に関して，ボーアは，実験配置によって文脈が定まると述べている[2]．例えば，位置の測定装置に結合されている状況では，粒子性の文脈，運動量の測定装置に結合されている状況では，波動性の文脈が選ばれる．

ボーアが相補性原理が不確定性原理より上位の原理だと考えた根拠としては，位置の測定が座標軸に固定された巨視的なフレームとの相互作用を前提とし，運動量の測定が測定装置との間の運動量を保存する相互作用を前提とするというように，それぞれの物理量を測定する条件が自然に想定され，それらの条件が互いに排他的であることから，測定の文脈に対する相補性が不確定性原理を導くという考えがあったようである．

しかし，不確定性原理に対する理解が格段に深まった今日では，そのような考えは，成立しない[*2)]．例えば，アインシュタイン，ボドルスキー，ローゼン[9]によって議論されたEPR状態では，一方の粒子の同時刻の位置の値と運動量の値を共に決定できるにもかかわらず，それらの値が共に定義されているとは考えられない．つまり，一つの測定装置で二つの異なる文脈によって定義された位置の値と運動量の値をともに測定できる実験配置が可能である．つまり，非可換性は常に文脈の非両立性を導くが，必ずしも，同時測定の不可能性を導かないからである[*3)]．

*2) 不確定性原理に関する最近の研究成果については文献 5～8) を参照されたい．

■ 3. 2重スリットの実験 ■

量子力学による実在の記述の不完全性を問うたEPRのパラドックスに関する議論がボーアとアインシュタインとの論争[11]の掉尾を飾ったとすると，論争は，不確定性原理の成立を巡るヤングの干渉実験に関する議論で幕を開けた．

2重スリットの干渉実験は，粒子性と波動性の相補性を示す具体例として，様々な教科書で取り上げられている．特に，ファインマン[12]による教科書では，量子力学の第1章をこの例の解説にあてている．一方，朝永は，本特集のテーマである「光子の裁判」[13]という裁判仕立ての劇として解説している．詳しくは本特集の島田氏の記事を参照いただきたい．

ボーアとアインシュタイン[11]の間の論争の結論は，どちらのスリットを通り抜けたかを決定するどのような試みも干渉縞を消失させる結果を招くということであった．広く流布された干渉縞の消失に関する説明では，ハイゼンベルク[1]の不確定性原理を用いて，干渉縞の消失は，位置の測定に不可避に伴う粒子の運動量の擾乱によるものであると説明された．

ボーア[11]によるこの観点は，1990年代の初めにスカリー，エングラート，ウォルサー[14]によって挑戦された．彼らは，粒子への運動量移動を伴わずに経路情報が獲得されることをある経路測定の方法によって示した．その後，このグループとウォールズのグループ[15]との間で論争が戦わされた．ウォールズのグループは，スカリー達の測定においても，運動量の確率分布の3次以上のモーメントが変化しているので，わずかではあるが「非局所的」運動量移動が実際に起こっていると主張した．最近の研究では，たとえ，運動量の確率分布が変化しなくても運動量の値の変化が存在し得ることが導かれ，その変化は，弱測定によって検出可能であることが示された[16,17]．その実験的検証は，ミール（Mir）等[18]によって報告されている．ただし，そのような運動量の微妙な変化が干渉縞の消失の原因であると結論するのは難しい．やはり，運動量の変化と

*3) 詳しくは，文献 3) および文献 10) を参照されたい．

干渉縞の消失との間の定量的関係が明らかにされることが望まれる．

4. 不確定性原理と干渉縞の消失

測定という概念は，量子力学の中心概念であるにも関わらず，その完全に一般的な記述は長いこと知られていなかった．そのため，長年の間なされてきた量子測定に関する多くの主張が，一般的理論の観点からは，ある限られたクラスの測定についてしか成立しないことが明らかになってきた．

例えば，不確定性原理から導かれると主張された自由質点の位置の反復測定に関する「標準量子限界」[19, 20] が実際には不可避な限界ではなく，いわゆる「収縮状態測定」[21] を含む測定のあるクラスによって打破可能であることがわかった[22~24]．この論争を契機に，不確定性原理の物理学的意味が明らかにされた[25~28]．今日では，常に成立する正しい誤差と擾乱の関係式[25]が得られ，ハイゼンベルク[1]によって提唱された関係式は，誤差と擾乱が被測定系の状態と独立（誤差擾乱独立測定）でないならば，一般には成立しないことがわかった[25, 28]．

では，このような新しい知見によって，経路情報の獲得と干渉縞の消失の関係について，より正確な説明が可能になるであろうか．以下では，この問題について，ヘア-バナクローチェ（Gea-Banacloche）氏と行った共同研究の成果[29]を交えて解説したい．「干渉縞が観測されることと経路に関する情報の獲得が互いに両立しない」[30] というしばしば繰り返された主張が一般的には正しくないことを示し，普遍的に成立する関係を導こう．

従来の議論では，位置 $\hat{x}$ と運動量 $\hat{p}_x$ に測定誤差 $\varepsilon(\hat{x})$ と擾乱 $\eta(\hat{p}_x)$ に関するハイゼンベルクの不確定性関係

$$\varepsilon(\hat{x})\eta(\hat{p}_x) \geq \frac{\hbar}{2} \tag{3}$$

を適用する．ここで，$\hbar = h/(2\pi)$．これから，間隔 d で離れた二つのスリットを分離するのに十分正確に位置 $\hat{x}$ を測定するには，$\varepsilon(\hat{x}) \sim d$ が要請されるので，$\hat{p}_x$ の擾乱が $\eta(\hat{p}_x) \sim \hbar/(2d)$ 程度になることが導かれ，十分な精度の経路測定は，干渉縞を消失させることが導かれた．

しかし，近年の研究で，関係 (3) が普遍的限界ではないことが明らかにされた．関係 (3) に代わる普遍的限界は，

$$\varepsilon(A)\eta(B) + \varepsilon(A)\sigma(B) + \sigma(A)\eta(B) \geq \frac{1}{2}|\langle[A, B]\rangle| \tag{4}$$

で表される．ここで，$\varepsilon(A)$ は物理量 A の測定における平均 2 乗平方根誤差，$\eta(B)$ はその測定が物理量 B に引き起こす平均 2 乗平方根擾乱，そして，$\sigma(A), \sigma(B)$ は，測定直前のそれぞれの標準偏差である．

それでは，この普遍的不確定性関係を適用すれば，同様な結論が得られるであろうか．その答えは，否定的である．まず第 1 に，観測者は，実際に位置の物理量 $\hat{x}$ を測定する必要がない．実際に必要なのは，例えば，x の値が下のスリット近くでは -1 の値をとり，上のスリット近くでは，$+1$ の値をとる x の関数を測定することである．そのような関数として，次のものが考えられる．

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases} \tag{5}$$

次に，重要な点は，$\hat{x}$ を測定する場合と $f(\hat{x})$ を測定する場合とで，右辺の交換子の期待値が大きく異なる点である．前者では，$\hat{x}$ と $\hat{p}_x$ の交換子は，$i\hbar$ という定数であり，次式が得られる．

$$\varepsilon(\hat{x})\eta(\hat{p}_x) + \varepsilon(\hat{x})\sigma(\hat{p}_x) + \sigma(\hat{x})\eta(\hat{p}_x) \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{6}$$

一方，物理量 $f(\hat{x})$ および $\hat{p}_x$ に対しては，交換子は以下のようになる．

$$[f(\hat{x}), \hat{p}_x] = i\hbar f'(\hat{x}) = 2i\hbar\delta(\hat{x}) \tag{7}$$

（ここで，δ はディラックのデルタ関数を表す）．したがって，その期待値は，測定直前の波動関数が二つのスリットを通過したばかりなら，零である．つまり，

$$\varepsilon(f(\hat{x}))\eta(\hat{p}_x) + \varepsilon(f(\hat{x}))\sigma(\hat{p}_x) + \sigma(f(\hat{x}))\eta(\hat{p}_x) \geq 0 \tag{8}$$

という関係に帰着する．このことは，誤差と擾乱の不確定性関係は，運動量の擾乱に関しては，まったく制約を与えないことを意味する．

5. 2 次元空間による表現

以上から，位置と運動量の組は，干渉の消失を議論するのに，最適な組ではないと考えられる．もし，ψ_+ と ψ_- が $f(\hat{x})$ の固有基底ならば，それと相補的な物

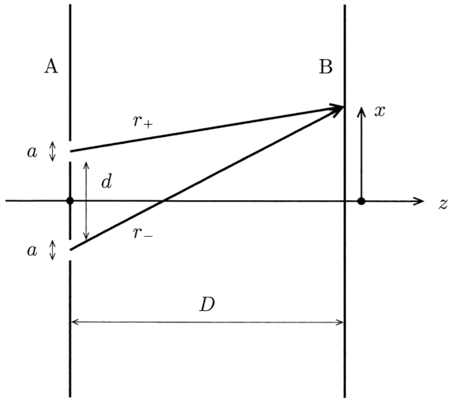


図1　2重スリット実験の配置.

理量として，固有基底が，$\psi_+ \pm \psi_-$ で表される物理量をとることができる．これらの基底は，相互不偏的基底（mutually unbiased basis）と呼ばれる．そこで，「相補的物理量」の可能な選択として，次の定義を与えよう．$Z = f(\hat{x})$ を (5) で定義した関数 f で定まる2値作用素

$$(Z\psi)(x) = \psi(x) \quad (x > 0),$$
$$(Z\psi)(x) = -\psi(x) \quad (x < 0) \qquad (9)$$

とし，X, Y を次のように定義する．

$$(X\psi)(x) = \psi(-x) \quad (x \in \mathbf{R}),$$
$$(Y\psi)(x) = -i\psi(-x) \quad (x > 0),$$
$$(Y\psi)(x) = i\psi(-x) \quad (x < 0). \qquad (10)$$

それらの交換関係として，以下の関係が得られる．

$$XY = iZ, \quad YZ = iX, \quad ZX = iY,$$
$$[X, Y] = 2iZ, \quad [Y, Z] = 2iX,$$
$$[Z, X] = 2iY. \qquad (11)$$

以下では，適当な2次元部分空間で経路測定と干渉の関係が表現できることを示そう．

さて図1に示すような2重スリットの実験を考察する．左から z 軸にそって入射した粒子は壁Aにあけられた二つのスリットを通過し，距離 D だけ離れたスクリーンBに到達する．z 軸の原点は壁Aのすぐ後ろとし，x 軸の原点は二つのスリットの中間点とする．二つのスリットの間隔を d，それぞれの隙間を a とする．ただし，以下の考察ではその近似の範囲で $a \approx 0$ と仮定する．$\psi_+(x, z), \psi_-(x, z)$ をそれぞれ上，下のスリットを通過した粒子の波動関数とする．粒子の運動量を $\hbar k$ とし，それぞれのスリットからスクリーンB上の座標 x の点までの経路を r_+, r_- とすると，$\psi_+(x, D) \propto e^{ikr_+}$, $\psi_-(x, D) \propto e^{ikr_-}$ となる．

$$r_\pm = \sqrt{D^2 + \left(x \pm \frac{d}{2}\right)^2}$$
$$\simeq D + \frac{1}{2D}\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right) \mp \frac{d}{2D}x \qquad (12)$$

より，位相差は kdx/D となり，よく知られた干渉縞が得られる．

$$\left|e^{ikr_+} + e^{ikr_-}\right|^2 \sim \cos^2\left(\frac{kd}{2D}x\right). \qquad (13)$$

状態 $|+\rangle, |-\rangle$ をそれぞれ上，下のスリットを通過した直後の粒子の状態とする．これらの状態は，直交する波動関数 $\psi_+(x, 0)$ と $\psi_-(x, 0)$ に対応する．これらの波動関数 $|+\rangle$ および $|-\rangle$ で張られる部分空間を $\mathcal{H} \cong \mathbf{C}^2$ とする．基底 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ に対してパウリ行列 $\sigma_z, \sigma_y, \sigma_x$ を導入する．$|+\rangle = |+z\rangle, |-\rangle = |-z\rangle$ が成り立つ．問題の対称性から $\psi_+(-x, z) = \psi_-(x, z)$ と仮定する．すると，作用素 σ_x, σ_y, σ_z はちょうど (9), (10) で定義された作用素 X, Y, Z の2次元空間 $\mathcal{H}$ への制限に対応することがわかる．

$\mathcal{H}$ における最も一般的な粒子の状態は，

$$|\alpha, \beta\rangle = \cos\frac{\beta}{2}|+\rangle + e^{i\alpha}\sin\frac{\beta}{2}|-\rangle \qquad (14)$$

と表せる．対応するスクリーンB上の波動関数は，

$$\psi(x, D) = \cos\frac{\beta}{2}\psi_+(x, D) + e^{i\alpha}\sin\frac{\beta}{2}\psi_-(x, D) \qquad (15)$$

で与えられる．すると，この状態 $|\alpha, \beta\rangle$ でスクリーン上の点 x に粒子が検出される確率密度 $|\psi(x, D)|^2$ は，射影 $|+\phi\rangle\langle+\phi|$ の状態 $|\alpha, \beta\rangle$ における期待値 $P(\phi)$ に比例することが得られる．ここで，$\phi = dx/D$ であり，$|+\phi\rangle$ は $\sigma_\phi = \cos\phi\sigma_x + \sin\phi\sigma_y$ の $+1$ 固有状態である．

一般に，2重スリットによって粒子が状態 $\rho_Q = |\theta\rangle\langle\theta|$ に準備され，直ちに，経路測定装置と相互作用する状況を考察したい．ここで，

$$|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\theta/2}|+z\rangle + e^{-i\theta/2}|-z\rangle\right) \qquad (16)$$

とする．経路検出器との相互作用の後，粒子の状態は一般にある縮約密度作用素 $\tilde{\rho}_Q$ で表される．上述により，この状態の粒子の集団がつくる干渉縞のスクリーン上の点 x における相対的濃度は，状態 $\tilde{\rho}_Q$ において

物理量 $\sigma_\phi = \sigma_x \cos\phi + \sigma_y \sin\phi$ を測定して測定値 $+1$ を得る確率 $P(\phi)$ $(\phi = dx/D)$ で与えられる．$P(\phi)$ を求めると次式が得られる．

$$P(\phi) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{Tr}\left[\sigma_x \tilde{\rho}_Q\right]\cos\phi + \mathrm{Tr}\left[\sigma_y \tilde{\rho}_Q\right]\sin\phi\right). \tag{17}$$

そこで，**干渉強度** $\mathcal{V}$ を次のように定義する．

$$\mathcal{V} = \frac{\max_\phi P(\phi) - \min_\phi P(\phi)}{\max_\phi P(\phi) + \min_\phi P(\phi)}. \tag{18}$$

この定義から次の関係が得られる．

$$\mathcal{V}^2 = 2\mathrm{Tr}\left[\tilde{\rho}_Q^2\right] - \mathrm{Tr}\left[\sigma_z \tilde{\rho}_Q\right]^2 - 1. \tag{19}$$

■ 6. 測定過程 ■

粒子 $\mathbf{S}$ に対する任意の測定装置は一般に 4 項列 $(\mathcal{K}, \rho_D, U, M)$ によって記述される[31]．ここで，$\mathcal{K}$ は測定装置内のプローブ $\mathbf{P}$ を記述するヒルベルト空間，$\rho_D = |\xi\rangle\langle\xi|$ は，プローブの初期状態 $\xi \in \mathcal{K}$ で定まる密度作用素，また，U は測定相互作用の間の $\mathbf{S}+\mathbf{P}$ の時間発展を表す $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ 上のユニタリ作用素で，M は，測定相互作用直後に観測者によって直接，測定されるプローブ $\mathbf{P}$ のメーター物理量を表す．M の測定値は，上，下のスリット通過に対応して ± 1 の値をとるとする．

測定の統計を完全に特徴付けるために，それぞれ**測定誤差作用素**，**擾乱作用素**，**事後相関作用素**と呼ばれる次の作用素を導入する．

$$\begin{aligned} N_z &= U^\dagger (I \otimes M) U - \sigma_z \otimes I, \\ D_z &= \sigma_z \otimes I - U^\dagger(\sigma_z \otimes I)U, \\ C_z &= U^\dagger(\sigma_z \otimes I)U - U^\dagger(I \otimes M)U. \end{aligned}$$

ここで，N_z は，σ_z の相互作用直前の値がどれほど正確に M に移行したのかを，D_z は，σ_z の値が相互作用の間にどれほど大きく変化したのかを，C_z は，相互作用直後におけるメータ物理量 M の値とやはりこれも相互作用直後における σ_z の値の間の相関の強さを表す．

$\mathbf{S}$ の初期状態が ρ_Q ならば，σ_z に対する（**平均 2 乗平方根**）**測定誤差** $\varepsilon(\sigma_z)$（これは，単に σ_z の**誤差**とも呼ばれる），σ_z の（**平均 2 乗平方根**）**擾乱** $\eta(\sigma_z)$, σ_z に対する（**平均 2 乗平方根**）**事後相関誤差** $\delta(\sigma_z)$ は，それぞれ，次のように定義される．

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma_z) &= \mathrm{Tr}[N_z^2(\rho_Q \otimes \rho_D)]^{1/2}, \\ \eta(\sigma_z) &= \mathrm{Tr}[D_z^2(\rho_Q \otimes \rho_D)]^{1/2}, \\ \delta(\sigma_z) &= \mathrm{Tr}[C_z^2(\rho_Q \otimes \rho_D)]^{1/2}. \end{aligned}$$

定義より $N_z + D_z + C_z = 0$ であるから，ε, η, δ は，いくつかの「三角不等式」を満たす．特に，

$$|\delta(\sigma_z) - \varepsilon(\sigma_z)| \le \eta(\sigma_z) \tag{20}$$

という関係が成り立つ．これは，測定が被測定量を乱さないという特別な場合には，測定誤差と事後相関誤差が一致することを表している．

■ 7. 干渉強度と事後相関誤差 ■

ρ_Q を $\mathcal{H} \cong \mathbf{C}^2$ 上の任意の密度作用素とし，最も一般的な経路測定装置 $(\mathcal{K}, \rho_D, U, M)$ の事後相関誤差 $\delta(\sigma_z)$ を評価しよう．$\sigma_z^2 = I$ かつ $M^2 = I$ より，

$$A = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[(\sigma_z \otimes I)U(\rho_Q \otimes \rho_D)U^\dagger] \tag{21}$$

とおくと，

$$\delta(\sigma_z)^2 = 2 - 2\mathrm{Tr}[MA] \tag{22}$$

が得られる．トレースノルム $\|A\|_{\tau c} = \mathrm{Tr}[|A|]$ のよく知られた性質から，$\mathcal{K}$ 上のすべての可能なメータ物理量 M（すなわち，ある射影作用素 P によって $M = 2P - I$ となる）に関する最小値（**最適事後相関誤差**）を求めると，次式が得られる．

$$\min_M \delta(\sigma_z)^2 = 2 - 2\mathrm{Tr}[|A|]. \tag{23}$$

そこで，$\mathrm{Tr}[|A|]$ の値を評価するために，A の固有値 $\lambda_\pm$ を求めると，以下のように表される[29]．

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\sigma_z \tilde{\rho}_Q\right] \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \mathcal{V}^2}. \tag{24}$$

$\mathrm{Tr}[|A|] = |\lambda_+| + |\lambda_-|$ より，

$$\mathrm{Tr}[|A|] = \sqrt{1 - \mathcal{V}^2} \tag{25}$$

が得られる．これから次の一般的結論が得られる．

$$\delta(\sigma_z)^2 \ge \min_M \delta(\sigma_z)^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \mathcal{V}^2}. \tag{26}$$

これは，最も一般的な経路測定装置に対する事後相関誤差と干渉強度と間のトレードオフを示している．大きな干渉強度（$\mathcal{V} \to 1$）は，大きな事後相関誤差（$\delta(\sigma_z) \to 2$）の代償の下で（すなわち，測定後の $\mathbf{S}$ の状態は，σ_z の固有状態にはそれほど似ていない場合に）のみ可能で

ある．また，逆に，もし $\delta(\sigma_z)$ が零に限りなく近づくならば，干渉強度も限りなく零に近づく．

ここで，

$$\mathcal{D} = 1 - \frac{\min_M \delta(\sigma_z)^2}{2} \qquad (27)$$

とおき，**最適事後相関強度**と呼ぶ．式 (26) から干渉強度と最適事後相関強度の間に次のようなトレードオフが成立する．

$$\mathcal{V}^2 + \mathcal{D}^2 = 1. \qquad (28)$$

なお，最適事後相関強度を得るためには，経路測定装置のヒルベルト空間を十分に大きくとり，プローブの初期状態 ρ_D が純粋状態になる記述が必要である．

従来の主張の不備に対するわれわれの解決は，以下の通りである．先行研究として有名なエングラート[30]のモデルでは，われわれのモデルのように完全に一般のユニタリ作用素を仮定していない．彼のモデルは被観測量を乱さない，つまり，常に $\eta(\sigma_z) = 0$ となっていることがわかる．式 (20) よりそのモデルにおいて，測定誤差と事後相関誤差は一致する．したがって，このようなクラスの経路測定に限っては，

$$\mathcal{D} = 1 - \frac{\min_M \varepsilon(\sigma_z)^2}{2} \qquad (29)$$

が成り立ち，$\mathcal{D}$ を**最適測定精度**，または，**経路識別度**と呼ぶことができるであろう．すると，式 (28) より獲得される経路情報が正確であるほど，干渉強度が弱まるという関係が存在する．しかし，このような干渉と経路情報の獲得の間の相互排他的性質は，限定的な妥当性しか持たない．むしろ，干渉強度は経路測定の最適事後相関強度によって制約されるというのが一般的な結論である．

参考文献

1) W. Heisenberg, *Z. Phys.* **43**, 172–198 (1927) [W. ハイゼンベルク著，河辺六男訳，量子論的な運動学および力学の直観的内容について，湯川秀樹，井上健編『世界の名著 66』(中央公論社，1970)，pp.325–355].
2) N. Bohr, *Nature* **121**, 580–590 (1928) [ニールス・ボーア著，山本義隆編訳『因果性と相補性』(岩波書店，1999)，pp.19–64].
3) 小澤正直，北島雄一郎，科学の示す実在像について：ボーア＝アインシュタイン論争研究の最前線，「現代思想」(2012 年 1 月号)，**40** (1), 138–160.
4) 朝永振一郎，素粒子は粒子であるか，『量子力学的世界像』(弘文堂，1965)，pp.33–64.
5) 小澤正直，不確定性原理・保存法則・量子計算，「日本物理学会誌」(2004 年 3 月号)，**59** (3), 157–165.
6) 小澤正直，不確定性原理の新展開：古い解釈と新しい定式化，「数理科学」(2005 年 10 月号)，**38** (10), 5–17.
7) 小澤正直，不確定性原理の新しい姿，「科学」(2012 年 7 月号)，**82** (7), 778–787.
8) 小澤正直，量子測定の数理と不確定性原理，「数学セミナー」(2012 年 11 月号–2013 年 10 月号)，**51** (11), 36–41; **51** (12), 52–57; **52** (1), 58–63; **52** (4), 50–55; **52** (5), 55–61; **52** (6), 42–47; **52** (9), 48–53; **52** (10), 50–55.
9) A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777–780 (1935).
10) M. Ozawa, *Found. Phys.* **41**, 592–607 (2011).
11) N. Bohr, in P.A. Shilpp, editor, *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, pp.200–241, (Northwestern University, Evanston, 1949) [ニールス・ボーア著，山本義隆編訳『因果性と相補性』(岩波書店，1999)，pp.209–272].
12) R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* volume III (Addison, Reading, MA, 1965) [R.P. ファインマン著，砂川重信訳『ファインマン物理学 5: 量子力学』(岩波書店，1986)].
13) 朝永振一郎，光子の裁判，『量子力学的世界像』(弘文堂，1965)，pp.65–116.
14) M.O. Scully, B.-G. Englert, and H. Walther, *Nature* **351**, 111–116 (1991).
15) H.M. Wiseman, F.E. Harrison, M.J. Collet, S.M. Tan, D.F. Walls, and R.B. Killip, *Phys. Rev. A* **56**, 55–75 (1997).
16) M. Ozawa, *Phys. Lett. A* **335**, 11–19 (2005).
17) M. Ozawa, *Ann. Phys. (N.Y.)* **321**, 744–769 (2006).
18) R. Mir, J.S. Lundeen, M.W. Mitchell, A.M. Steinberg, J.L. Garretson, and H.M. Wiseman, *New J. Phys.* **9**, 287/1–287/11 (2007).
19) C.M. Caves, K.S. Thorne, R.W.P. Drever, V.D. Sandberg, and M. Zimmermann, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 341–392 (1980).
20) C.M. Caves, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2465–2468 (1985).
21) H.P. Yuen, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 719–722 (1983) [see also *ibid.* p.1603].
22) M. Ozawa, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 385–388 (1988).
23) M. Ozawa, in P. Tombesi and E.R. Pike, editors, *Squeezed and Nonclassical Light*, pp.263–286, New York (1989), Plenum.
24) J. Maddox, *Nature* **331**, 559 (1988).
25) M. Ozawa, *Phys. Rev. A* **67**, 042105 (2003).
26) M. Ozawa, *Phys. Lett. A* **318**, 21–29 (2003).
27) M. Ozawa, *Int. J. Quant. Inf.* **1**, 569–588 (2003).
28) M. Ozawa, *Ann. Phys. (N.Y.)* **311**, 350–416 (2004).
29) M. Ozawa and J. Gea-Banacloche, in preparation.
30) B.-G. Englert, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2154–2157 (1996).
31) M. Ozawa, *J. Math. Phys.* **25**, 79–87 (1984).

(おざわ・まさなお，名古屋大学大学院情報科学研究科)

「光子の裁判」とエンタングルメント

高 木　伸

1. 前世紀末の驚き

この二十年間，量子力学関連で最も驚かされたのは，C_{60} の **DS**（ダブルスリット）実験*1)で干渉縞を観察したウィーングループの報告[1)]だった．当時の（日本の）新聞は，昨今の風潮とは異なり，これを大々的に報ずるようなことはなかった．しかし，C_{60} の干渉縞など見えるはずがないと思い込んでいた筆者にとっては極めて衝撃的だったから，その後まもなく今世紀初頭に磁束キュービットを確立した実験が発表されたときには，C_{60} より遥かに巨大な“ヤリイカ”(SQUID）の干渉（いわばDS実験の時間版）[2)]は瞠目すべきことと理解したものの情緒的にはほとんど驚かなかった．

Kittelの教科書に，結晶のX線回折模様の解析に使われるエヴァルト球面で名高いEwaldから聞いたという逸話が紹介されている．「まだLaueの実験が行われる前，実験計画がミュンヘンの喫茶店で議論されていたときのこと．室温では結晶中の原子位置は大きく熱揺動していて規則的周期配列から懸け離れている，だから，室温で実験しても明瞭な回折模様など期待すべくもないとの悲観論が優勢だった.」実際，“室温における原子の熱揺動振幅は結晶中の原子間隔の1割程度にもなり得る.”にもかかわらず，“実際に室温で実験してみたらシャープな回折模様が見えた”．後日，温度依存性が系統的に調べられ，“温度が上がるにつれて，ブラッグピークの強度は減少するものの，回折模様に変わりのないことが分かった”[3)]．

ミュンヘン喫茶店の面々と同じく，“常識的理由”に拠り C_{60} の干渉縞など見えない（見えるとしてもまだまだ先のこと）と思っていた物理屋は多い．ウィーンの実験家たちは，ミュンヘンの故事に深く学んでいたのだろう，“見えない”とする根拠をしらみつぶしに吟味し多大の技術的難関を突破して干渉縞観察に成功した．報告をよく見てみれば，実験家の努力と炯眼に敬服するものの，結果自体は驚くにあたらないことが後知恵で分かった．当時の新聞の科学記者諸氏は，一般職業物理屋の先入観などに囚われておらず，新聞一面に報道するなど論外と判断されたのだろう．誠に明察だった．

その後，C_{60} と同類の C_{70} や $C_{60}F_{48}$，はたまた $C_{44}H_{30}N_4$（テトラフェニルポルフィリン）や $C_{32}H_{18}N_8$（フタロシアニン）などでもDS実験が行われ干渉縞が観察されてきた．$C_{60}F_{48}$ は質量が C_{60} の2倍以上あり，$C_{44}H_{30}N_4$ や $C_{32}H_{18}N_8$ は，質量こそ C_{60} より小さいものの，扁平に近い複雑な形をしているらしい．それにしても気になるのは，1999年にウィーンのArndtさんからの手紙にあったウィルスDS実験の計画，まだ実現されていないようだが，ウィルスの干渉縞が観察された暁を想うにつけ感ずる薄気味悪さは前世紀

*1）C_{60} は60個の炭素原子からなる篭型分子：通称サッカーボール．この実験には回折格子が使われたが，回折格子とDSは本質的に同じだから本稿では区別しない．

末から変わらない[4]．

本稿は，**WW**（Welcher-Weg）問題［光の DS 実験に関して「光子よ，お前が通ってきたのはどっちの道なんだい？」と問う「どっちみち難題」］を扱う「光子の裁判」を念頭に，判例を二つばかり紹介したい．その一つが C_{60} についてであり，概念的準備を兼ねて，質点についての例をまず議論する．

2. 質点の裁判

2.1 絶壁反射干渉

DS 実験に代えて図 1 のような思考実験（実験室は 1 次元）を想定しよう．実験室内の地点を座標 x で表すこととして，x=0 に絶壁があり，質点は x<0 の領域には侵入できないとする．時刻 $t=0$ に，質点を左波束と右波束の重ね合わせ状態に準備する．ただし両波束は，それぞれ x=a 付近と x=$3a$ 付近に局在し，いずれも初速度 $-v_0(<0)$ とする．時間が経つと，左波束は，$t\simeq a/v_0$ に絶壁で反射され $t\simeq t_*\equiv 2a/v_0$ に a 付近に速度 v_0 で到達する．一方，右波束は，$t\simeq t_*$ に a 付近に速度 $-v_0$ で到達する．したがって，質点検出器を，あらかじめ a 付近にびっしり並べておいて，時刻 t_* に作動させれば，検出確率が検出器の位置に依存し，干渉模様が見えるだろう．

質点（質量 m, 位置変数 x）のハミルトニアンは

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V_{絶壁}(x),$$

$$V_{絶壁}(x)\equiv\begin{cases}0 & : \ x>0,\\ \infty & : \ x<0.\end{cases}$$

質点の始状態（を表す波動函数；規格化定数は省略）は，$k_0\equiv mv_0/\hbar$ と置いて，

$$\phi_{左}(x-a)e^{-ik_0(x-a)}+\phi_{右}(x-3a)e^{-ik_0(x-3a)}. \tag{1}$$

ただし，$\phi_{左}(x)$ と $\phi_{右}(x)$ はいずれも $x=0$ 付近に集中した実函数[*2]．両者は同じである必要はなく精確な形も重要ではないが，具体的に想い描くには例えば，幅 $\Delta_0(\ll a)$ のガウス函数

$$\left(\sqrt{2\pi}\Delta_0\right)^{-1/2}e^{-x^2/4\Delta_0^2} \tag{2}$$

とすればよい．「時刻 0 に $\phi_{左}(x)$ と一致する自由粒子波動函数」を $\phi_{左}(x;t)$ と書こう．例えば $\phi_{左}(x)$ が (2) の場合の $\phi_{左}(x;t)$ は

$$\left(\sqrt{2\pi}\Delta(t)\right)^{-1/2}e^{-x^2/4\Delta_0\Delta(t)}, \tag{3}$$

ただし $\Delta(t)\equiv\Delta_0+i\hbar t/2m\Delta_0$．「右」についても同様．(1) を始状態として状態は概ね[*3]次のように発展する（因子 $e^{-i\hbar k_0^2t/2m}$ は省略）：

- $t<a/v_0$ においては[*4]，質点は自由粒子として振る舞い，左右波束とも速度 $-v_0$ で進む：

$$\phi_{左}(x-a+v_0t;t)e^{-ik_0(x-a)}+\phi_{右}(x-3a+v_0t;t)e^{-ik_0(x-3a)}. \tag{4}$$

- $t\sim a/v_0$ に左波束は絶壁で反射され進行方向が逆転（と共に符号も変化）するが右波束は速度 $-v_0$ で進み続け，その結果，$a/v_0<t<3a/v_0$ にて

$$-\phi_{左}(-x-a+v_0t;t)e^{-ik_0(-x-a)}+\phi_{右}(x-3a+v_0t;t)e^{-ik_0(x-3a)}. \tag{5}$$

「時刻 t_* に質点位置が x の確率」[*5]は下記に比例：

$$|\psi_{左}(\mathrm{x})|^2+|\psi_{右}(\mathrm{x})|^2+2\mathcal{I}(\mathrm{x}), \tag{6}$$

$$\psi_{左}(x)\equiv-\phi_{左}(-x+a;\ t_*)e^{ik_0(x+a)},$$

$$\psi_{右}(x)\equiv\phi_{右}(x-a;\ t_*)e^{-ik_0(x-3a)},$$

$$\mathcal{I}(x)\equiv 干渉項=\Re\left\{\psi_{左}^*(x)\psi_{右}(x)\right\}.$$

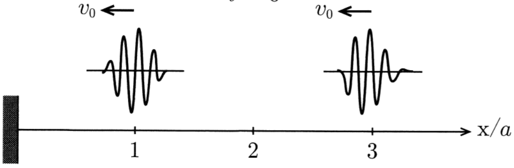


図 1 絶壁反射実験．

*2) これをフーリエ変換したものが波数 0 付近に集中していることも仮定．

*3) 正確な時間変化は，(1) を始状態とする自由粒子波動函数を $\psi^{自由}(x;t)$ と書いて，$\psi^{自由}(x;t)-\psi^{自由}(-x;t)$．

*4) 精確には，(3) を採用した場合，$a-v_0t\gg|\Delta(t)|$．

*5) 正確には，「質点が地点 x 付近の区間 $(\mathrm{x}-\delta\mathrm{x}/2,\ \mathrm{x}-\delta\mathrm{x}/2)$ に見出される確率」$/\delta\mathrm{x}$．

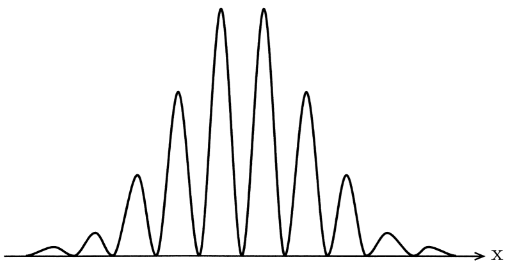


図 2　絶壁反射干渉縞.

(6) を「絶壁反射干渉縞」と呼ぼう．簡単のため，$\phi_{\text{左}}(x) = \phi_{\text{右}}(x) = \phi(x)$ とし，さらに $\phi(x)$ が偶函数の場合に限定すれば，

$$\mathcal{I}(x) = -|\phi(x-a;t_*)|^2 \cos 2k_0(x-a).$$

具体的に $\phi(x)$ を (2) と採り，例えば $k_0\varDelta_0 \sim 5$ と想定して，(6) を描くと図 2 のようになる．

2.2 きりぎし証人

絶壁反射実験の場合の WW は，検出器で捉えられた質点が「左方から来たか，右方から来たか」ということ．左方から来たならば絶壁と衝突してきたはずだから，もし絶壁が固定されていないなら絶壁の動きから WW を察することができるかもしれない．そこで，絶壁に力学的自由度を与えて「質量 $M(\gg m)$，位置変数 ξ」の質点とみなし，考察中の質点と区別すべく**きりぎし**[5)]と呼ぼう．質点ときりぎしからなる全系のハミルトニアンは

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + V_{\text{絶壁}}(x-\xi).$$

時刻 0 に「質点の状態は (1) で表され，きりぎしの状態は $\xi = 0$ 付近に集中した実函数 $\varPhi(\xi)$ で表される」とすれば，全系の始状態を表す波動函数は (1) × $\varPhi(\xi)$: $\varPhi(\xi)$ の精確な形は重要ではないが，具体的にイメージするには例えば (2) にて

$$\{x,\ \varDelta_0\} \to \{\xi,\ \varDelta_{\text{き}}\} \tag{7}$$

とすればよい．「時刻 0 に $\varPhi(\xi)$ と一致する自由粒子波動函数」を $\varPhi(\xi;t)$ と書けば，全系の状態は次のように発展：

- $t < a/v_0$ においては，質点ときりぎしは互いに隔たっており独立に自由粒子として振る舞う：

$$(4)\ \times\ \varPhi(\xi;t). \tag{8}$$

- $t \sim a/v_0$ に，質点の左波束はきりぎしと衝突して進行方向が逆転し，きりぎしは運動量 $-2\hbar k_0$ を得て反跳する．一方，質点の右波束は $t < a/v_0$ における状況と変わりない．したがって，$t = t_*$ においては，$V_0 \equiv 2\hbar k_0/M$, $\xi_* \equiv V_0(t_* - a/v_0)$ と略記して，

$$\psi_{\text{左}}(x)\varPhi(\xi+\xi_*;\ t_*)e^{-i2k_0\xi} + \psi_{\text{右}}(x)\varPhi(\xi;t_*). \tag{9}$$

(8) と (9) の最大の違いは「x と ξ に関する因数分解が前者はできて後者はできない」こと．一般に，後者のような因数分解できない（分離不可能な）状態は**エンタングル状態**（entangled state）[*6)]，このような状態が生ずることや生じた状況は**エンタングルメント**（entanglement），と呼ばれる．以下，紙面節約のため，**絡縺**と書く[*7)]．

時刻 t_* に，「質点ときりぎしの位置がそれぞれ x と ξ，の結合確率」が $|(9)|^2$ で与えられ，これを ξ について積分して，「質点位置が x の確率」は「(6) にて $\mathcal{I}(x)$ を次の $\mathcal{J}(x)$ で置き換えたもの」に比例する：

$$\mathcal{J}(x) = \Re\left\{\mathcal{C}\psi^*_{\text{左}}(x)\psi_{\text{右}}(x)\right\},$$
$$\mathcal{C} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\ \varPhi^*(\xi+\xi_*;t_*)e^{i2k_0\xi}\varPhi(\xi;t_*).$$

$M \gg m$ を考慮し $\xi_*(=2am/M)$ を無視して[*8)]

$$\mathcal{C} \simeq \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\ e^{i2k_0\xi}\ |\varPhi(\xi;t_*)|^2.$$

特に $\varPhi(\xi)$ が ξ の偶函数なら，$\mathcal{C}$ は実数であり $\mathcal{J}(x) \simeq \mathcal{C}\,\mathcal{I}(x)$．因子 $\mathcal{C}$ は，きりぎしの「衝突前の状態と衝突後の状態」で決まり，絡縺が生じなければ（つまり，全系の衝突後の状態が (5) × $\varPhi(\xi;t)$

---

*6)　tangle［絡（から）まり縺（もつ）れ］させられた状態.

*7)　精確には，(9) の第一項自体が一般に絡縺状態であり，これが分離可能となるための必要充分条件は，例えば $\phi_{\text{左}}(x)$ も $\varPhi(\xi)$ もガウス型の場合，$\varDelta^2_{\text{き}}/\varDelta^2_0 = m/M$.

*8)　次の条件を仮定する：$\xi_* \ll |\varDelta_{\text{き}}(t_*)|$，即ち $a \ll (M/m)|\varDelta_{\text{き}}(t_*)|$．これは，前脚註の分離可能条件および条件 $k_0\varDelta_0^2 \gg a$ が充たされているとして $|\varDelta_{\text{き}}(t_*)| \simeq \varDelta_{\text{き}}$ を使うと，$a \ll \sqrt{M/m}\varDelta_0$ に帰着．また，$M \gg m$ により $a \gg \varDelta_0$ と両立.

ならば）登場しない量であって，きりぎしが質点に対して「仕切り壁（dividing wall）」の役割を果たすことに由来するから，デバイド–ウォール（divide–wall）因子と呼ぼう．これは，ミュンヘンの故事に出てきたX線回折の理論にてブラッグピーク強度*9)を記述する，デバイ–ウォーラー（Debye–Waller）因子と本質的に同じもの．以下，$\Phi(\xi)$ を (7) のように採って

$$\mathcal{C} \simeq \varepsilon^2 \quad : \varepsilon \equiv e^{-k_0^2 \Delta_{き}^2}. \tag{10}$$

この結果とWWとの関係を考えてみよう．以上においては，証人となり得るきりぎしを訊問したわけではない（つまり，きりぎしに関しては何も測定していない）から，“きりぎしが質点と衝突して動いた（あるいは動かなかった）”などと断言することはできない．古典論で考えると，きりぎしは，質点と衝突したとすれば運動量 $-2\hbar k_0$ を得て反跳し，衝突しなかったとすれば運動量が0のままに留まるはず．したがって，もし $t \simeq t_*$ にきりぎし運動量を測定したとすれば，測定値が $-2\hbar k_0$ か0かに応じて，質点と衝突したか否かが分かる．量子論でもおよそ同じだろう．ただし，始状態に関するきりぎし運動量の揺らぎ（$\sim \hbar/\Delta_{き}$）を考慮すると，$-2\hbar k_0$ と0の違いが明確に判別できるには，$\hbar k_0 \gg \hbar/\Delta_{き}$ という条件が必要だろう．かくて，次のようにまとめることができる：$k_0\Delta_{き} \gg 1$ の場合には，もしきりぎし運動量を測定したとすれば，きりぎしが左方へ動いているか否かが分かり，それに応じて，きりぎしは質点と「衝突した」あるいは「衝突しなかった」と言えて，質点が「左方から来た」あるいは「右方から来た」と推定できるだろう．ただしこの場合，$|\mathcal{C}| \ll 1$ だから，干渉縞はほとんど見えない．逆に，$k_0\Delta_{き} \ll 1$ なら上記のような推定はできないだろう．この場合には，$|\mathcal{C}| \simeq 1$ だから，干渉縞が明瞭に見える．つまり干渉縞は，WW推定が可能な状況ではほとんど見えず，不可能な状況では明瞭に見える．

ただし，質点が「左方から来た」と推定できる場合にも，「右方からは来なかった」とは言えない．「左か右かの二律背反」は古典物理の論理であり保証の限りでない．また，以上 (10) 以下に書いたことは一つの解釈であって，(10) 自体は，このような解釈に基づいて導かれたわけではないし，きりぎしを測定することを想定したものでもない．

3. C_{60} の裁判

WWを知るには“DS通過直後の粒子に光を照射して位置を見る”という“レーダー方式”も昔から考えられている．これも一興だが，もし粒子自身が発光してくれるなら光照射の手間が省ける．ウィーンの実験の C_{60} は，温度900 K程度の“オーブン”で作られ，DSに入射した時点で様々な励起状態にある（古典的イメージで言えば，例えば篭がふにゃふにゃとさざなみ立っている）と考えられる．これらの励起状態は，寿命 τ（$\sim$ 数ミリ秒）に比べて充分に長い時間が経てばほぼ確実に，光子を放出して基底状態に落ち着く．放出された光子を検出すれば C_{60} のWWが決着できるかもしれない．かくて，C_{60} の裁判では，光子に被告としてでなく証人として登場していただく．

実験室内の地点をデカルト座標 (x,y,z) で表すとして，z軸上のz< 0の領域にオーブンを用意し，z= 0の面（xy面）にスリットを置いて，z= D の面に C_{60} 検出器群を配置する．C_{60} は，時刻 $t = t_{\rm O}(< 0)$ にオーブンを出て，$t = 0$ にスリットを通過し，z= D の面には $t = t_{\rm D}(\gg \tau)$ に達するとする．また，$|t_{\rm O}| \ll \tau$ とする．すると，スリット通過時の C_{60} はいずれかの励起状態にあるはずだが，簡単のため，ある特定の励起状態 $\varphi_{\rm e}(\{\boldsymbol{r}\})$ にあるものとする．ただし，C_{60} の相対位置変数をまとめて $\{\boldsymbol{r}\}$ と書き，重心位置変数は $\boldsymbol{R}$ と書く．

まず，スリットSが一個だけ（単一スリット）で，その中心がxy面の原点に在る場合を想定しよう．仮に発光しなかった場合の C_{60} の時刻 $t_{\rm D}$ における波動函数を

$$\varphi_{\rm e}(\{\boldsymbol{r}\})\psi(\boldsymbol{R}) \tag{11}$$

としよう（下記 (12) に対応すべく書けば | 真空 〉

*9) または，メスバウアー効果の無反跳遷移確率．

が掛かる）．運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ の光子（以下「光子 $\boldsymbol{k}$」と呼ぶ）を放出して基底状態 $\varphi_{\rm g}(\{\boldsymbol{r}\})$ に落ちた場合には，重心が運動量 $-\hbar\boldsymbol{k}$ を得て反跳することを考慮して，C_{60} と電磁場からなる全系の時刻 $t_{\rm D}$ における状態は，おおむね

$$\varphi_{\rm g}(\{\boldsymbol{r}\})\psi(\boldsymbol{R})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}}|\boldsymbol{k}\rangle, \tag{12}$$

ただし，$|\boldsymbol{k}\rangle$ は「光子 $\boldsymbol{k}$ が1個だけ存在する」場合の電磁場の状態．実際には様々の運動量の光子が放出され得るから，光子 $\boldsymbol{k}$ 放出の確率振幅を $\gamma_{\boldsymbol{k}}$（$\sum_{\boldsymbol{k}}|\gamma_{\boldsymbol{k}}|^2=1$）として，(12) に代えて

$$\varphi_{\rm g}(\{\boldsymbol{r}\})\psi(\boldsymbol{R})|\gamma(\boldsymbol{R})\rangle,$$
$$|\gamma(\boldsymbol{R})\rangle \equiv \sum_{\boldsymbol{k}}\gamma_{\boldsymbol{k}}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}}|\boldsymbol{k}\rangle.$$

次に，$\boldsymbol{d}\equiv d\boldsymbol{e}_{\rm x}$（$\boldsymbol{e}_{\rm x}\equiv$ x 方向単位ヴェクトル）と置き，上記のスリット S をそれぞれ $\{-\boldsymbol{d}/2, \boldsymbol{d}/2\}$ だけずらしたものを { $S_{左}, S_{右}$ } と呼ぼう．仮に C_{60} が $S_{右}$ だけを通過した場合には，上式にて $\boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{d}/2$ だけずらせばよい：

$$\varphi_{\rm g}(\{\boldsymbol{r}\})\psi_{右}(\boldsymbol{R})|\gamma(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{d}/2)\rangle, \tag{13}$$

ただし $\psi_{右}(\boldsymbol{R})\equiv\psi(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{d}/2)$．同様に，$S_{左}$ だけを通過した場合には，

$$\varphi_{\rm g}(\{\boldsymbol{r}\})\psi_{左}(\boldsymbol{R})|\gamma(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{d}/2)\rangle. \tag{14}$$

したがって，DS{ $S_{左}, S_{右}$ } を通過した場合には，上二式の重ね合わせとなり，「C_{60} が z= D の面の地点 $\mathbf{x}$ に見出される確率」は次式に比例：

$$|\psi_{左}(\mathbf{x})|^2+|\psi_{右}(\mathbf{x})|^2+2\mathcal{K}(\mathbf{x}), \tag{15}$$
$$\mathcal{K}(\mathbf{x})\equiv\Re\{\mathcal{D}\psi^*_{左}(\mathbf{x})\psi_{右}(\mathbf{x})\},$$
$$\mathcal{D}\equiv\langle\gamma(\mathbf{x}+\boldsymbol{d}/2)|\gamma(\mathbf{x}-\boldsymbol{d}/2)\rangle$$
$$=\sum_{\boldsymbol{k}}|\gamma_{\boldsymbol{k}}|^2e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{d}}.$$

k_0 $\equiv$「$\varphi_{\rm e}$ と $\varphi_{\rm g}$ のエネルギー差」$/\hbar c$ とおき，エネルギー保存則を考慮して $\sum_{\boldsymbol{k}}|\gamma_{\boldsymbol{k}}|^2f(\boldsymbol{k})\simeq\int d\Omega_{\boldsymbol{n}}f(k_0\boldsymbol{n})$: $\boldsymbol{n}\equiv\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ と近似して，

$$\mathcal{D}\simeq\mathcal{D}(k_0)\equiv(\sin k_0d)/k_0d.$$

かくて，次のようにまとめることができる：$k_0d\gg1$（つまり，放出された光子の波長 $\ll d$）の場合には，もし光検出器を用意して適切に指向性をもつ光子波束を検出したとすれば，光が $S_{左}$ 方面から来たか $S_{右}$ 方面から来たかが分かり，それに応じて，C_{60} は $S_{左}$ あるいは $S_{右}$ を通ってきたと推定できるだろう．ただしこの場合，$|\mathcal{D}|\ll1$ だから，干渉縞はほとんど見えない．逆に，$k_0d\ll1$ なら，光子波長が長すぎて上記のような推定はできないだろう．この場合には，$|\mathcal{D}|\simeq1$ だから，干渉縞が明瞭に見える．ただし，以上においては光子に関して何も測定していない．つまり，事情は第2節と同様．

現実のウィーン実験においては，励起状態が“ある $\varphi_{\rm e}$ に決まっている”わけではない．オーブン内の C_{60} が温度 T で決まる熱平衡状態にあり，簡単のため，励起状態のエネルギーが確率 $\mathcal{W}(k_0)\equiv(\hbar c/k_{\rm B}T)e^{-\hbar ck_0/k_{\rm B}T}$ で分布していたとすれば，干渉縞は「(15) をこの分布で平均したもの」つまり「$\mathcal{D}$ を次の $\overline{\mathcal{D}}$ で置き換えたもの」となる：熱波数 $k_T\equiv k_{\rm B}T/\hbar c$ を用いて

$$\overline{\mathcal{D}}=\int_0^\infty dk_0\,\mathcal{W}(k_0)\mathcal{D}(k_0)=\frac{\tan^{-1}k_Td}{k_Td}.$$

これは Td の単調減少函数．現実に T と d を様々に変えた実験が行われ，定性的に上式から期待されるような観察結果が得られている[6)]．

4. 証人訊問

証人訊問に進もう．質点の裁判にて，「時刻 t_* に，質点位置が x，きりぎし運動量が $\hbar K$，の結合確率振幅」は，(9) を ξ に関してフーリエ変換した

$$\psi_{左}(x)e^{-(K+2k_0)^2\Delta_{き}^2}+\psi_{右}(x)e^{-K^2\Delta_{き}^2}$$

に比例する（(10) に至る一連の近似を使った）．したがって，きりぎし運動量を測定すれば，測定値としておおむね $-2\hbar k_0$ か0が得られる．「測定値が $-2\hbar k_0$ の場合に，質点位置が x の確率振幅」（つまり，「きりぎし運動量が $-2\hbar k_0$」という条件のもとでの質点位置の条件付き確率振幅）は，上式にて $K=-2k_0$ と置いた $\psi_{左}(x)+\psi_{右}(x)\varepsilon^4$ に比例する．それゆえ，干渉項の大きさは ε^4 程度となる．したがって，$k_0\Delta_{き}\gg1$ なら，干渉縞が

ほとんど見えないと共に，左波束項が圧倒的に大きいから「質点は，左方から来た可能性が圧倒的に大きく，右方から来た可能性は圧倒的に小さい」と推定できる．この推定は，質点を直接に尾行した結果に基づくものではないが，単なる“証言”に基づくものでもなく，物証に基づくと言ってよいかもしれない．逆に $k_0\Delta_{き} \ll 1$ なら，干渉縞が明瞭に見えると共に，左波束項と右波束項がほぼ同じ大きさゆえ WW については何も言えない．

稀に測定値が $-\hbar k_0$ 程度となることもある．測定値が $-\hbar k_0$ の場合には上式に代えて $\{\psi_{左}(x)+\psi_{右}(x)\}\varepsilon$ となり，$k_0\Delta_{き}$ の大きさがどうであれ，干渉縞が (6) で与えられ明瞭に見えると共に，WW については何も言えない．これに相当する状況が C_{60} の裁判にても起こり得る．光子を証人訊問すべく光子検出器を作動させ，ある運動量 $\boldsymbol{k}_*$ の光子を検出したとしよう．「光子 $\boldsymbol{k}_*$ が一個見出された」という条件のもとでの C_{60} 重心位置の条件付き確率振幅は，(13)+(14) にて $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_*$ の項だけを残したものに比例し，この場合の干渉縞は，(15) にて $\mathcal{D}$ を位相因子 $e^{i\boldsymbol{k}_*\cdot\boldsymbol{d}}$ で置き換えたもの，つまり，「仮に光子放出なしとした場合の干渉縞」が全体としてずれたもの（ずれの大きさ $\propto \boldsymbol{k}_*\cdot\boldsymbol{d}$）とほぼ同じになる．

なお，訊問された証人は擾乱を蒙るだろうけれども，それについては，証人にはお気の毒ながら本裁判は関知しない．

5. まとめ

質点あるいは C_{60} が証人（きりぎしあるいは電磁場）と相互作用することに因り生ずる絡縺が本質的であり，絡縺の程度に応じて干渉縞の見え具合が決まる．もし証人訊問（つまり，測定行為という積極的観測）がなされれば，その結果に応じて絡縺の様子が変わり，干渉縞の見え具合も変わる．ほとんど見えなくなることもあれば，より明瞭に見えるようになることもある．一方，証人訊問なしの場合にも，次のような観測記事は書ける：「$k_0\Delta_{き} \gg 1$ の（あるいは，短波長光子波束が放出される）場合には，証人が WW を“観測した”ことになり，干渉縞はほとんど見えない．逆に $k_0\Delta_{き} \ll 1$ の（あるいは，長波長光子波束が放出される）場合には，証人は WW を“観測しなかった”または“観測したつもりでも精度が低すぎた”ことになり，干渉縞は明瞭.」しかし，これは単にそう言ってみただけのことで，“観測”に実質的な意味はない．この“観測”は，観念的なものでも測定行為でもなく，きりぎしあるいは電磁場という環境が自動的に行う，または行わない，ことに過ぎない．

本稿は，C_{60} の DS 実験について 10 年以上前に書いたもの[7]がアクセスしにくいので再版するような気分でとのことでお引き受けしたが，量子力学を習いたてでスピンや光子になじんでいない学生さんにも理解してもらえるようにと付記した「質点の裁判」が主になってしまった．なお，絡縺は，測定とは全く独立なことがらであり，また，何ら珍しいことでもない．例えば水素原子の基底状態は電子と陽子について分離不可能な絡縺状態．本稿の内容は，実験の紹介を除けば，21 世紀になって書くべきような新しいものではなく，1930 年代に書かれていても不思議ではない．

参考文献

1) M. Arndt *et al.*, *Nature* **401** (1999), 680–682.
2) 「巨視的量子現象と観測問題」数理科学 **40** 第 7 号 No.469 (2002), 21–28（数理科学，2006 年 4 月別冊「量子の新世紀」に再録）.
3) C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* 3rd ed. (John Wiley and Sons Inc., 1967), pp.68–69.
4) 「量子コヒーレンスと猫性度」パリティ **15** No.04 (2000), 22–26.
5) 夏目漱石「夢十夜」第十夜“不思議な事に洋杖（ステッキ）が鼻へ触りさへすれば豚はころりと谷の底へ落ちて行く．覗いて見ると底の見えない絶壁（きりぎし）を，逆さになった豚が行列して落ちて行く.”『夏目漱石全集・第四巻』（創藝社，1954），p.180.
6) L. Hackermüller *et al.*, *Nature* **427** (2004), 711–714.
7) *Welcher-Weg Puzzle with a Decaying Atom* in *Fundamental Aspects of Quantum Physics*, ed., L. Accardi and S. Tasaki (World Scientific, 2003), pp.188–196;「緩和する原子と どっちみち難題」物性研究 **82** No.6 (2004), 888–894.

（たかぎ・しん）

特集／波と粒子

「光子の裁判」にまつわる最近の実験から

重ね合わせ状態を弱測定で観測する

飯沼 昌隆

「光子の裁判」のくだりで，光子さんの移動した経路を検証するためにたくさんの警官を配置する場面がありました．そのとき光子さんをとらえた警官がその場所を知らせてから，光子さんを離しました．こうして第三者が光子さんの経路を確認できるわけですが，このときの光子さんは窓を通るときも警官にとらえられるために，両方の窓を通る行動がとれませんでした．どうやら光子さんは警官にとらえられると，行動を極端に変えてしまうぐらい敏感な人のようです．そのため光子さんの両方の窓を通る行動を第三者が直接確認できないことが最大の問題でした．

でもよくよく考えてみると，光子さんの場所を特定するために，警官が完全にとらえる必要はないかもしれません．もしかしたら足だけをちょっと触ったり肩に少し触れたりすれば，光子さんという人物を完全に特定できなくても，誰かいるぐらいはわかります．過敏な光子さんもほんの一部を触れられる程度だったら，あまり行動を変えないかもしれません．少し触れる程度だったら，光子さんのありのままの行動を知ることができるかもしれない…．でもちょっと待ってください．一部に触れる程度だったら別の物と間違えたり，あるいは別の警官と間違う可能性があります．あちらこちらの警官からの報告の中には光子さんに触れた警官からの報告もあるでしょうが，運悪く光子さん以外に触れてしまった警官が間違えて報告する場合もあるでしょう．こう考えると，場所を特定できるといっても間違いを多く含んでいる可能性が高いと思われます．さらに移動中の人物が確実に光子さんと特定できることも必要です．はたして警官が触れる程度で，光子さんのありのままの行動を知ることができるのでしょうか？

今から20年ほど前アハロノフらは，測定対象物にほとんど影響を与えないような一部に触れる程度の測定であっても，その測定の前後で確実にとらえる測定も合わせて行えば正しい測定結果が得られることを理論的に示しました[1)]．これが弱測定と呼ばれるものです．光子さんの場合，門で一度とらえられ，途中の窓のところで警官に触れられた後に家の壁でとらえられて，“両方の窓を通った光子さん”と確定されることに対応します．このとき光子さんの位置情報に間違った報告が多くても，測定を何度も繰り返し確定した場合のみを抜き出せば，間違いの影響は少なくなって位置が特定できるようになります．ただし繰り返して得られた測定結果を統計的に扱いますので，光子さんの位置は確率でしかわかりません．しかしながらこの方法を使えば，光子さんにほとんど影響を与えずに移動中の位置を確率として知ることができます．

弱測定の理論は，量子状態にほとんど影響を与えずに測定が可能であることを示しています．その一方で量子状態には“重ね合わせ状態”があります．この重ね合わせ状態はよくよく考えてみる

と数式を言葉で表現しただけのものであって，物理概念を示したものではありません．重ね合わせ状態は従来の測定を行うと測定の影響ですぐに壊れてしまうために，物理的にどんな状態なのか誰も説明できませんでした．光子さんの例では，両方の窓を通る途中の状態が重ね合わせ状態ですが，その状態を物理的に説明しようとすると“両方の窓を同時に通った”と主張する以外に説明の仕方はなかったのです．でも弱測定を使えば重ね合わせ状態をほぼ壊さずに測定することが現実的に可能になります．重ね合わせ状態を弱測定で測定したら，はたしてどんな結果が得られるのでしょうか？

近年の弱測定の実験では，両方の窓を通る途中の光子さんを観測した例は残念ながらまだありません．ただ光子さんの場合と異なりますが，別の重ね合わせ状態を測定した例として，ハーディのパラドックスの観測があります．ハーディのパラドックスでは電子用と陽電子用の２つの干渉計を用意して，電子の干渉計の２つの経路の一方と陽電子の干渉計の２つの経路の一方が重なるように２つの干渉計を配置します．詳細は省きますが，横田，井元らが電子と陽電子の代わりに２個の光子を使った弱測定で途中の経路の確率を測定してみると，ある条件の下ではなんと！負の確率が測定されました[2)]．弱測定を使った他の重ね合わせ状態の測定でも負の確率が測定されています．負の確率とは何でしょうか？ 物理的に理解すべきものなのでしょうか，それとも単なる弱測定の理論的な産物にしかすぎないのでしょうか？

筆者の実験グループでも光子の偏光の重ね合わせ状態に対して，弱測定から確実にとらえる通常の測定までいろいろな強さの測定を行ってみました[3)]．さらに量子力学の数式に一切頼らず，通常の確率論や統計的手法のみを駆使して実験データから状態が壊れる前の確率を求めてみたら…，驚くことに弱測定の理論とは関係なく，負の確率が得られました．しかも弱測定の結果と一致しただけでなく，量子力学の予想値とも一致しました．この結果から，状態が壊れる前のありのままの確率分布と直接測定された確率分布とは基本的に異なること，負の確率は状態が壊れる前の確率であって直接測定された確率は正の値しかもたないこと，弱測定は状態が壊れる前の確率を測定していたことが分かってきました．なお状態が壊れる前の確率は一般的に複素数で表現されるという理論もあります[4)]．

通常，量子状態は密度行列や波動関数で表現されますが，実験データから求まるものは確率分布です．そこで量子力学が確立された直後の1930年代から，量子状態を確率分布として表現しようとする試みがありました．ところがそれらを確率分布として表現しようとすると，負や複素数が出てくるのです[5)]．このとき負や複素数の確率は物理的に無意味なものとして無視されてきました．その理由の一つに物理学では，確率は相対頻度で表すべきだという認識があったと思います．しかし確率という概念は想像以上に単純ではなく，相対頻度だけが確率を表すわけではないことが分かってきました．実際，ベイズ統計のように相対頻度だけからは求まらない主観確率を扱う場合もあります．あのディラックやファインマンも複素数の確率[6)]や負の確率[7)]を論じていました．私たちは確率は正でなければいけないという固定観念にとらわれてすぎていて量子力学が理解できないのかもしれません．みなさんはどのように思いますか？

参考文献

1) Y. Aharonov, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1988, 1351.
2) K. Yokota, *et al.*, *New J. Phys.* **11**, 2009, 033011.
3) Y. Suzuki, *et al.*, *New J. Phys.* **14**, 2012, 103022.
4) H.F. Hofmann, *New J. Phys.* **14**, 2012, 043031.
5) J.G. Kirkwood, *Phys. Rev.* **44**, 1933, 31.
6) P.A.M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* **17**, 1945, 195.
7) R.P. Feynman, “Negative Probability” in Quantum Implications: *Essays in Honour of David Bohm* edited by B.J. Hiley and F.D. Peat (Routledge and Kegan Paul Ltd., London and New York, 1987) 235.

（いいぬま・まさたか，広島大学大学院先端物質科学研究科）

演劇「光子の裁判」[1)]

渡辺　美帆子

体が硬直している[2)]．私を非難する沢山のまなざしが私の体に降り注いでいる．これが異端なものを排除しようとする人間心理なのか彼らは真実を認めない．私の言うことを誰も信じない．彼らの言葉と私の言葉はかけ離れていて，異国語みたいだ．それでも，主張しなければ．しかし，私には私のことを語る言葉が，これ以上，見つからない[3)]．

どうしたら良いのだろう．

条件はふたつ．

私は，常に，私自身であり，正気である．双子でもなければ，分身の術も使わない．

私は，ふたつの窓を一緒に通ることができる[4)]．

人生は一度きり．瞬間瞬間の選択が私という人物の経験を形づくり，アイデンティティになっていく．そう思い込んでいた．しかし，私に自分の意志はあるのだろうか[5)]．

「実地検証の場」で，私は，何度も同じ行為を繰り返す．私が通行する．その私は，逃げ去り，次の私が通行する．その私も，逃げ去り，次の私が通行する．複数の私が，私として計測され，私の特性をつくっている[6)]．

私の罪はなんだったのだろう．私は，なぜ，裁かれていたのだろう[7)]．

自分のことは自分で決めなさい，と母がよく言っていた．でも，自分のことを自分で決めるなんて，できるのかしら．

「私一人の行動は，複数の私の行動から導き出される私全体の確率とどっちが大切？」と，自問自答する．でも，そんな問いにも意味がないことに気が付く．私の“個”の中には，私全体の“確率”があって，それが当然のこと[8)]．

どのくらいの時間が経ったのだろう．

気が付いたら，すべてがおわっていたようで，私はまた，一人ぼっちになった．みなが私から目をそむける．

“あの人”は，私についての夢から覚め，もう一度，吸いさしのタバコに火をつけている．

きっと，私のことを，見ないように見ている[9)]．

小気味よいような悲しいようなそれとも，何の感情もないような不思議な気分で，私は町に出る．「実地検証の場」を抜け出して，私の存在は，世界中のありとあらゆる場所に一緒に存在する可能性だった．可能性は連続的に空間の中を移動する．

その，どれもが，一人の私で，薄まりもしなければ増えもしないで，今も，世界中の窓を一緒に通っている[10)]．

http://www.ustream.tv/recorded/10717112で，演劇上演の様子をご覧いただけます．上演を見たお客さまの感想が，http://togetter.com/li/67064と，https://twitter.com/NaminoMitsuko

にまとめられていますので，そちらもよろしければご覧ください．

注

1) 私は演劇の仕事をしています．3 年前，「光子の裁判」の演劇をつくりました．
2) 演劇は，身体を使って，誰かの行動や感情を模倣します．はたして，波乃光子はどのような状態でそこに立っていたのでしょうか．見られているときと見られていないときの身体の状態の差というものは，人間，誰にでもあるもので，「優れた俳優は舞台上で誰にも見られていない状態になることができる」なんてことも言いますが，波乃光子は，その差が激しすぎる！
3) 古典物理学の世界に生活する我々と，量子物理学の世界に生活する波乃光子とでは，対話が困難です．ディラックや朝永先生は，その仲介者として，彼女の言葉を代弁しなくてはいけない，という愛と執念を持っているように見えます．「光子の裁判」は朝永先生の波乃光子への愛情劇としても読みごたえたっぷりです．
4) 「不可分の一個体なのに，二つの窓を一緒に通る」とはどういう状況なのでしょうか．私が本作を演劇にした際，「同時に通る」と台詞を書き換えたら，観客から「同時に通るとはどういう意味ですか？」と質問をされ，えらく悩んだものでした．今でもよくわかりません．
5) ある日の稽古で，役者の一人が，「人間の行動も統計学であらわせるもんねー」とつぶやきました．
それから，演劇の上演後，島田一平先生とトークをしたときに，彼から「渡辺さんは運命を信じますか？」と聞かれ，これまた面食らったのでした．
6) 幾度も反復し，実験をするというのが，演劇「光子の裁判」の演出で最も悩んだシーン．小説を読んでいるつもりで，次のページを開いたら，いきなり実験がはじまった，初読時の衝撃ったら，もう！
7) 一説によると，波乃光子が裁判にかけられている理由は，饅頭泥棒だとのこと．
8) 原作で，「実地検証」がはじまった後，波乃光子は喋らなくなります．一番喋ってほしいシーンなのに．でも，喋ってしまうと，誰かに見られていることになってしまい，シーンの前提が揺らいでしまうからダメですね．
9) 稽古の中で，役者の皆と，「観測者は，波乃光子のことを，見てないフリして，ちらっと見れば良いんじゃないかねー？」と話していました．後日，細谷暁夫先生に「弱い観測というものがあるんですよ」と教えてもらい，びっくり．
10) 波乃光子は，今，何をしているのでしょうか．

（わたなべ・みほこ，渡辺美帆子事務所／二十二会）

実験から見た「光子の裁判」

単一性と非局所性

枝松 圭一

1. はじめに

筆者が「光子の裁判」[1)]を自身で読む機会を初めて得たのは，大阪大学基礎工学部に着任した年であったと記憶している．当時筆者は，学部学生に対する少人数セミナーを，同僚であった石原一氏（現在は大阪府立大学教授）と共に担当することとなった．石原氏が，量子力学と光の不思議を感じてもらうための教材として「光子の裁判」を用いることを提案され，その面白さに遅れ馳せながら感銘した筆者は，それに関連した簡単なデモ実験を考案することとなった．残念ながら，「光子の裁判」に含まれるエッセンスをすべて含むような実験を学生に体験してもらうことはできなかったが，不可思議な量子の世界の一端を垣間見る実験の面白さに触れ，目を輝かせる学生が少なからずいたことが記憶に新しい．

「光子の裁判」では，被告人（波乃光子）の裁判劇の中で，弁護人（P.M. Diracらしき人物）の活躍により，光子が示す量子力学的性質すなわち古典的世界観では理解できない性質が明らかにされる．その性質は，大別して次のように分けられよう．

1. 被告が捕まる場合，それはいつでもただ一人である．
2. 誰も被告を見ていない場合，被告は二つの窓を同時に通ることができる（と被告は主張する）．そしてこの場合，同様のことを多数回繰り返すことで，奥の壁に干渉縞が観測される．
3. 誰かが被告を捕え，そして直ぐに放免すると，被告がどちらの窓を通ったかの経路がわかる．しかしこの場合，干渉縞は観測されない．

本稿では，光子のもつこれらの不可思議な性質を，（筆者が以前に意図したように）種々の検証実験例と関連づけて，できるだけ易しく解説してみようと思う．

2. 被告はただ一人：単一性あるいは粒子性

裁判ではまず，被告が「はっきりとした不可分の一個体」であることを確認する尋問が行われた．検察官は「被告がAのところにいたならBのところにはいないこと，またBのところにいたならAのところにはいないこと」を議論の前提とすると主張し，弁護人も「この主張はたしかに検証された事実である」と認めている．ここでは，この主張を「**光子の単一性**」と呼ぶことにしよう．では，その検証とはどのような実験によって行われたのであろうか．

このような実験を行うための装置の概念図を図1に示す．ここで，**単一光子源**と記したのは，一度に一つの光子しか放出しない（二つ以上の光子を同時に放出しない）特別な光源である．このような光源を準備すれば，図1(a)のように，スリットAおよびBの後ろに光子検出器（光子が一つ来るたびに電気信号を発する検出器）を二つ配置し，それらが同時には光子を検出しないことを確かめればよい．同じことは，図1(b)のように，スリットA, Bの代わりに光を半分通し半分反射する半透過鏡（BS：ビームスプリッタ）を用いて実験することもできる．この実験系は，**ハンブリー・ブラウンとツイスの強度干渉計**とも呼ばれている[2)]．

さて，光子検出器D_AおよびD_Bが各々時刻t_Aおよびt_Bにおいて光子を検出するとしよう．この2光子検出の事象の頻度を，時間差$\tau = t_B - t_A$の関数として測定すると，それは光源の**2次の自己相関関数（強度相関関数）**$g^{(2)}(\tau)$

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t+\tau)\hat{a}(t)\rangle}{\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle^2} \qquad (1)$$

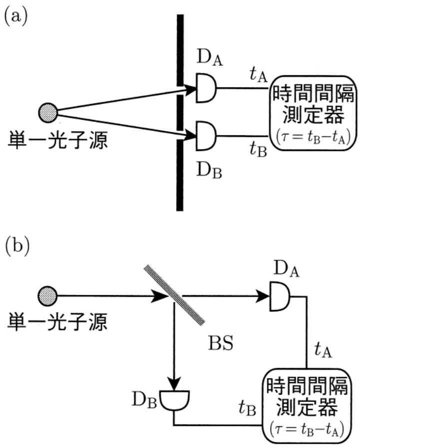


図1 光子の単一性を検証する実験の概念図．(a) 二重スリット，および (b) ビームスプリッタ（BS）を用いた測定系．

に比例する[3]．ここで，$\hat{a}^\dagger(t)$ および $\hat{a}(t)$ は各々時刻 t における光子の生成，消滅演算子である．もし光子が A と B に同時に検出されないのであれば，$g^{(2)}(0) = 0$ となるはずである．一方で，光を定常な古典電磁波と考えると，$g^{(2)}(0) \geq g^{(2)}(\tau) > 0$ となることがわかる．従って，$g^{(2)}(0) = 0$（現実には $g^{(2)}(0) \sim 0$）となることを観測することは，光が光子という粒子性をもち，「単一の光子」という状態が存在することの証左となる．

問題は，単一光子源をどのようにして実現するかである．単一光子の発生にはいくつかの方法が提案されているが，その一つが，単一の原子，分子，束縛電子など，単一の量子系における電子遷移に伴う発光を利用する方法である．すなわち，単一量子系における電子のフェルミオン性に基づき，同じ時刻に複数の光子が発生しないように制御された光源として利用するものである．このような方法による単一光子の発生は，1977 年，Na の単一の原子の発光において実験的に観測された[4]．興味深いのは，可視光領域における光子の単一性が実験的に検証されたのが「光子の裁判」の発表後かなり経ってからだったことである（朝永は γ 線など高エネルギーの光子を想定して光子の単一性を論じていたものと思われるが，逆に，γ 線光子を用いた二重スリットの実験は相当に困難であろう）．その後，単一イオン[5]，単一分子[6]，固体中の単一不純物準位[7]，半導体中の単一量子ドット[8,9]，のように，単一の量子系からの電子遷移による発光を分離して受光することによって観測されている[10]．近年では，発光ダイオード（LED）のように電流励起で利用できる単一光子源も報告されている[11]．

3. 二つの窓を同時に：非局所性あるいは波動性

次に，被告の「私は二つの窓の両方を一緒に通って室内に入ったのです」との主張についての検証実験について考えよう．ここでは，この主張を「**光子の非局所性**」と呼ぶことにする．検察官は，被告のこの主張と，前節で述べた「光子の単一性」とは相容れないものとしてその矛盾を突こうと考えた．それでは，光子の単一性と非局所性の双方を満足するような状態とはどのような状態であろうか．この状態 $|\psi\rangle$ を，光子が窓 A を通った状態 $|\mathrm{A}\rangle$ と窓 B を通った状態 $|\mathrm{B}\rangle$ の二つの状態の重ね合わせ

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\mathrm{A}\rangle + e^{i\phi}|\mathrm{B}\rangle\right) \qquad (2)$$

と書いてみよう．ここで，ϕ は両者の位相差を表す．光子の単一性を考慮すると，$|\mathrm{A}\rangle$（$|\mathrm{B}\rangle$）とは，窓 A（B）を通過する光子数が 1，窓 B（A）を通過する光子数が 0 の状態である．状態 (2) に対して窓 A（B）に光子を見出す確率 P_A（P_B）は $P_\mathrm{A} = P_\mathrm{B} = 1/2$ であるが，両方の窓に同時に光子を見出す確率は 0 である．

さて，件の裁判では，被告の主張に対する検証実験として，部屋の奥の壁に到達する光子の位置に対する統計分布を以下の条件で計測・比較した．

- **(i)** 窓が両方開いていて，かつ，どちらの窓を通ったかを判別する見張りがいない場合．
- **(ii)** A, B どちらか片方の窓を閉じた場合．
- **(iii)** 窓は両方開けるが，窓に見張りを置いてどちらの窓を通ったかを判別した場合．

その結果，(i) の場合には，光子の到達位置の統計分布に規則的な縞模様（**干渉縞**）が現れ，(ii) および (iii) の場合には干渉縞が現れず，光子の到達位置は一様な分布となった．裁判では，(i) と (ii) の違い，すなわち両方の窓が開いている場合のみ干渉縞が現れることから，光子が「両方の窓を通った」ことを間接的に証明した，という弁護側の論理が展開される．(iii) の場合については次節で述べることとし，(i) の場合の干渉の様子を，二つの窓（スリット）と壁（スクリーン）を使った実験系（図 2 (a)）に代えて，二つのビームスプリッタを用いた実験系（**マッハ・ツェンダー干渉計**：

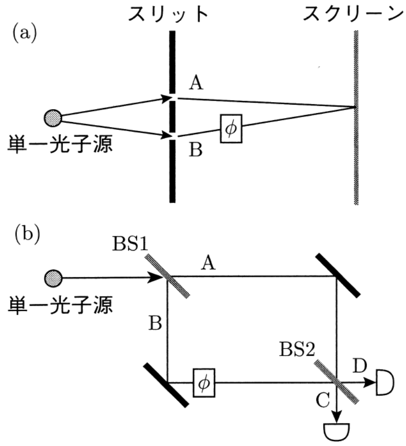


図 2 光子の非局所性に伴う干渉を測定する実験系．(a) ヤングの二重スリットの実験系，および (b) マッハ・ツェンダー干渉計．ϕ は経路 A,B 間の位相差を表す．

図 2 (b)）を用いて調べてみよう．BS1 を通過した後に (2) 式の状態にあった光子は，BS2 を通過後，

$$|\psi'\rangle = \frac{1+e^{i\phi}}{2}|\mathrm{C}\rangle + \frac{1-e^{i\phi}}{2}|\mathrm{D}\rangle \qquad (3)$$

に変化する．ここで，$|\mathrm{C}\rangle$（$|\mathrm{D}\rangle$）は光子が経路 C（D）にある状態である．このとき，C に光子を見出す確率 P_C は，

$$P_\mathrm{C} = \left|\frac{1+e^{i\phi}}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(1+\cos\phi) \qquad (4)$$

となって，周期的干渉縞が現れることとなる．一方，片方の窓を閉じた状態，すなわち (2) 式のどちらか片方の項のみの状態では，$P_\mathrm{C} = P_\mathrm{D} = 1/2$ となって，干渉縞は現れないこともわかる．

このような「単一の光子」を用いた干渉実験は，従来，強度を微弱にしたレーザー光を用いて行われていた．しかし，レーザー光をいくら弱くしても前節で述べたような単一性は示さないので，光を古典的電磁波と見なした場合との区別をつけ難く，この裁判で検証されるべき実験とは言い難い．前節で述べた意味での単一光子を用いた干渉実験は，1986 年に報告された観測例[12)]が最初で，最近では固体単一光子源を用いて干渉を測定した例も報告されている[13,14)]．

このように，「光子の裁判」では，光子の単一性と非局所性（あるいは粒子性と波動性）の両方が状況に応じて（ただし同時にではなく）現れ得ることが，弁護人が発議した実験によって検証される．そして，光子が主張する「両方の窓を通った」状態とは，弁護人自身が裁判の終盤で述べているように，(2) 式で表される重ね合わせ状態であることがわかった．さてそれでは，残された上記 (iii) の場合について，さらに事情を調べてみよう．

4. どっちを通った？：測定・擾乱と量子もつれ

裁判の中では，部屋の中に警官を多数配置し，光子に触れた警官がそれを記録した後直ちに光子を放免することを繰り返して，光子のたどった経路（軌跡）を記録する実験を試みている．そしてこのような場合には，単一の光子がたどる経路は必ず 1 本であるとともに，干渉縞は現れないとも記されている．「光子の裁判」では，「キリバコ」という，高エネルギーの粒子が通過した際にその経路の痕跡を記録する装置を念頭に置いているが，通常の可視光帯の光子のエネルギーは γ 線や X 線の光子に比べてたいへん小さいので，キリバコを使って軌跡を記録することはできない．そこで，ここでは図 2 (b) のマッハ・ツェンダー干渉計に対し，光子が経路 A を通ったか経路 B を通ったかを何らかの方法で測定・記録する測定装置を加えてみよう（図 3）．このとき，経路の測定装置 M の状態を $|m_i\rangle$ で表し，光子が通った経路に応じて $|m_\mathrm{A}\rangle$ または $|m_\mathrm{B}\rangle$ となるものとしよう．すると，(2) の状態に対して測定を行った後の状態は

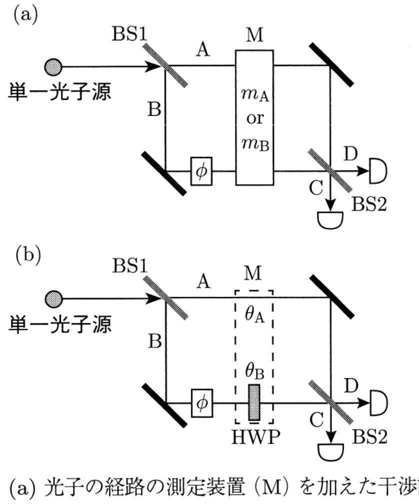


図 3 (a) 光子の経路の測定装置（M）を加えた干渉計．光子が通った経路（A または B）に応じて，M の状態が $|m_\mathrm{A}\rangle$ または $|m_\mathrm{B}\rangle$ に変化する．(b) 経路の測定に偏光回転を用いた場合の例．

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\mathrm{A}\rangle\otimes|m_{\mathrm{A}}\rangle + e^{i\phi}|\mathrm{B}\rangle\otimes|m_{\mathrm{B}}\rangle\Big) \tag{5}$$

と表すことができる．$|m_{\mathrm{A}}\rangle$ と $|m_{\mathrm{B}}\rangle$ が一次独立のとき，$|\Psi\rangle$ は光子の状態と測定装置の状態が**もつれた**（**エンタングル**した）状態である．この状態は，BS2 を通過後には

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{2}|\mathrm{C}\rangle\otimes|m_{\mathrm{A}}\rangle + \frac{e^{i\phi}}{2}|\mathrm{C}\rangle\otimes|m_{\mathrm{B}}\rangle + \frac{1}{2}|\mathrm{D}\rangle\otimes|m_{\mathrm{A}}\rangle - \frac{e^{i\phi}}{2}|\mathrm{D}\rangle\otimes|m_{\mathrm{B}}\rangle \tag{6}$$

に変化する．(3) との違いは，経路 A, B が測定された結果，系の状態に $|m_{\mathrm{A}}\rangle$ および $|m_{\mathrm{B}}\rangle$ による識別性が付与されていることである．このとき，経路 C に光子を見出す確率 P_{C} は，

$$P_{\mathrm{C}} = \langle\Psi'|C\rangle\langle C|\Psi'\rangle = \frac{1}{2}\{1+\mathrm{Re}(ve^{i\phi})\} \tag{7}$$

となることがわかる．ここで，$v=\langle m_{\mathrm{A}}|m_{\mathrm{B}}\rangle$ は測定による識別性の程度を表し，$0\le|v|\le1$ である．$|v|=1$ となる場合には $|m_{\mathrm{A}}\rangle$ と $|m_{\mathrm{B}}\rangle$ とは位相因子が異なるだけで識別性がなく，経路の測定は行われない．その結果，干渉縞の明瞭度は最大となる．$v=0$ となる場合には $|m_{\mathrm{A}}\rangle$ と $|m_{\mathrm{B}}\rangle$ とは直交するので経路が完全に識別され，それに伴って干渉縞は観測されなくなる．$0<|v|<1$ の場合には測定によって経路が部分的に識別され，干渉の明瞭度も上記の中間となる．$v=0$ の場合を「**強い測定**」（あるいは**射影測定**）と呼び，$|v|\lesssim1$ の場合を「**弱い測定**」と呼ぶ．このように，測定によって光子の経路が識別される場合，その識別性（あるいは測定の強度）に応じて対象系の干渉性が左右されることになる．

このことを別の観点から見てみよう．測定装置 M を含めた全系の状態 (5) は，光子の状態と測定装置の状態とがもつれた状態であることを述べた．このとき，光子のみの状態の**密度行列** ρ は

$$\begin{aligned}\rho &= \mathrm{Tr_M}|\Psi\rangle\langle\Psi| \\ &= \frac{1}{2}\Big(|\mathrm{A}\rangle\langle\mathrm{A}|+|\mathrm{B}\rangle\langle\mathrm{B}| \\ &\quad + ve^{i\phi}|\mathrm{B}\rangle\langle\mathrm{A}| + v^{*}e^{-i\phi}|\mathrm{A}\rangle\langle\mathrm{B}|\Big)\end{aligned} \tag{8}$$

となる．$|v|=1$ となる場合には非対角要素の大きさは最大であり，ρ は元の状態 (2) と同じく**純粋状態**（$\because\ \rho^2=\rho$）であるが，それ以外の場合には非対角要素の大きさが低下するとともに ρ は**統計的混合状態**となる

ことがわかる．すなわち，経路の測定によって，光子の重ね合わせ状態 (2) が測定装置の状態ともつれた状態 (5) となり，光子の状態が有していた位相情報が測定装置との間にまたがってしまった結果，光子の干渉性が低下したものと考えることができる．このことは，経路の測定によって，光子としての重ね合わせ状態の位相が**擾乱**を受けたものとみなすこともできる．「光子の裁判」において用いられた警官またはキリバコによる光子の経路の観測においても，原理的には上述の場合と同じ効果によって光子の干渉性が低下し，干渉縞が観測されなくなったのである．

では，実際の実験において，光子の経路を測定・記録するためにはどのような測定装置が用いられるのだろうか？ 通常用いられる「**光子検出器**」は，検出によって光子を消滅させてしまう「**破壊測定**」を行うので，経路の検出後も光子を残しておくことができず，上の目的には使えない．「光子の裁判」に登場するキリバコのように，光子を消滅させずに光子の存在を測定する「**量子非破壊測定**」は，理論的には，例えば光子と物質との非線形相互作用（Kerr 効果など）を用いて実現できる[15,16]．ところが実際には，光子 1 個による非線形性は非常に小さく，上述した弱い測定は実現できても，強い測定までを実現することは困難である[17]．そこでしばしば用いられるのが，光子の「**偏光**」の自由度である．すなわち，光子の経路の違いを，同じ光子の偏光の違いとして記録する方法である．この場合の測定装置はたいへん簡単で，光子の初めの偏光を一定の状態（例えば水平方向の直線偏光）とし，A, B のどちらか一方（あるいは両方）に偏光を回転させる素子をおけば良い（図 3 (b)）．偏光を回転させる素子としては，例えば半波長板と呼ばれる，複屈折性を有する光学素子が用いられる．ここで，経路 A（B）の光子の偏光方向（ここでは直線偏光のみを考える）の角度を θ_{A} (θ_{B}) とし，その状態を $|m_{\mathrm{A}}\rangle = |\theta_{\mathrm{A}}\rangle$ ($|m_{\mathrm{B}}\rangle = |\theta_{\mathrm{B}}\rangle$) と書くと，

$$v = \langle\theta_{\mathrm{A}}|\theta_{\mathrm{B}}\rangle = \cos(\theta_{\mathrm{A}} - \theta_{\mathrm{B}}) \qquad (9)$$

となり，$\theta_{\mathrm{A}} - \theta_{\mathrm{B}} = \pi/2$ のときに強い測定，$\theta_{\mathrm{A}} - \theta_{\mathrm{B}} \simeq 0$ のときに弱い測定が実現できることがわかる．このように，光子 1 個に関する 2 経路の情報は，簡単な光学素子を用いることで同じ光子の偏光状態として測定・記録することが可能であり，量子光学や量子情報の原理検証実験にしばしば用いられる．

5. 被告は「波乃光子」：二重性と相補性

この裁判では，被告である波乃光子が示す「単一性（粒子性）」と「非局所性（波動性）」の二重性が争点となり，検証実験によって，経路の測定をするとき被告は前者の性質を示し，経路の測定をしないときは後者の性質を示すことが明らかにされた．そして，弁護人が「被告が二つの窓を同時に通りぬけるという奇妙な行動をとるのは，その現場を人に知られないときにかぎるのです．したがって，それを直接諸君にお目にかけることは残念ながら不可能である」と述べているように，単一性と非局所性を同時に観測することは不可能であり，光子がどちらの性質を示すかは，実験の設定によって決定されるように見える．これは，ボーア（N. Bohr）が「**相補性**」と呼んだ性質である[18]．ボーアは，相補性はハイゼンベルク（W. Heisenberg）の**不確定性原理**[19]から導かれるものと考えたが，相補性と不確定性原理との間の関係についてはその後も議論があり[20~22]，本特集号の別の記事でも紹介されていることと思う．

光子の示す相補性に関しては，「**遅延選択**」と呼ばれる興味深い実験が提案[23]，実行[24]されている．これは，光子が二つの窓（あるいは最初のビームスプリッタ）を通過するまでは経路の測定をするかしないかは決めないでおき，光子が窓を通過した後にそれを決めて実行するという実験である．もし，光子が窓の通過前に何らかの方法で実験装置の状態を検知し，自身が単一性を示すか非局所性を示すか（すなわち窓の通過方法）を決定するものとすれば，あらかじめ経路測定の有無を決めておいた場合と窓の通過後に経路測定の有無を選択した場合には干渉縞の測定結果に違いが生じるはずである．この実験は，図 4 のように，マッハ・ツェンダー干渉計の入力側ビームスプリッタ（BS1）を光

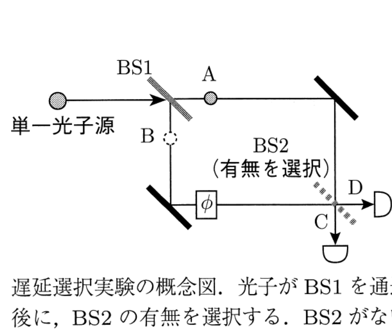


図 4　遅延選択実験の概念図．光子が BS1 を通過した後に，BS2 の有無を選択する．BS2 がない場合は光子の経路を測定し，BS2 がある場合は干渉を測定する．

子が通過した後に，出力側ビームスプリッタ（BS2）の有無を選択できるような実験装置を用いれば良い[23]．これと同等の機能を実現する実験[24]の結果は，経路の測定の有無をあらかじめ決めていた場合と，光子が窓を通過後に決めた場合とで変化はなく，どちらの場合も経路測定を行った場合は干渉縞が生じず，経路測定を行わなかった場合は干渉縞が生じることがわかった．すなわち，光子は実験装置の状態に応じてあらかじめ自身の身の振り方を変化させているわけではなく，測定によって光子（および測定装置）の状態が変化するのだ，ということがわかったことになる．

もう一つの興味深い実験は，経路の測定によっていったんは干渉しなくなった状態を，測定の情報を消去することによって再び干渉するように戻す実験で，「**量子消去**」とも呼ばれる[20,25]．例えば (6) の状態を考えよう．この場合，$v = \langle m_\mathrm{A} | m_\mathrm{B} \rangle = 0$ のときは干渉縞が消失することは前述した．(6) は光子の状態と測定装置の状態がもつれた状態であり，元の光子の位相の情報は，光子と測定装置の双方にまたがった状態で残されている．そこで，(6) に対し，測定結果が $|m_\mathrm{A}\rangle$ と $|m_\mathrm{B}\rangle$ の重ね合わせ $|m_\pm\rangle = (|m_\mathrm{A}\rangle \pm |m_\mathrm{B}\rangle)/\sqrt{2}$ となるような状態に射影測定を行い，そのときの干渉を測定することを考えよう．この操作は，例えば光子の偏光による測定・記録の場合は，図 3 (b) において $\theta_\mathrm{A} = 0°$, $\theta_\mathrm{B} = 90°$ としていったん直交する偏光となった状態を，BS2 通過後に $\pm 45°$ 方向の偏光フィルターを通して測定することに対応する．すると光子の状態は

$$\begin{aligned} |\psi'_\pm\rangle &= \langle m_\pm | \Psi' \rangle \\ &= \frac{1 \pm e^{i\phi}}{2\sqrt{2}} |\mathrm{C}\rangle + \frac{1 \mp e^{i\phi}}{2\sqrt{2}} |\mathrm{D}\rangle \end{aligned} \quad (10)$$

となって，$1/\sqrt{2}$ の係数を除いて (3) と同様な状態となり，干渉が復活する．ここで重要なのは，光子と測定装置を含めた全体の系 (5) および (6) がもとの位相情報を保っている，ということである．古典的測定器（例えば測定結果が電圧で示される場合など）の場合には測定結果の重ね合わせ状態をとること自体が不可能であるし，経路を巨視的な系で測定してもとの位相情報が完全に消失してしまった場合には，測定した情報を消去したとしても光子の情報を元に戻すことはできないことに注意してほしい．また，（上述した光子の偏光による経路測定・記録の場合は困難であるが）光子の検出の後に経路の測定装置の状態を測定する，「遅延選択」による量子消去の実験も行われている[26]．このような量子消去の実験を通じて，光子の示す相補性は，測定に伴う被測定系（光子）と観測装置との間の量子もつれの生成に由来するものとして理解されるようになった．

さらに最近では，前述した「弱い測定」を用いた，相補性に関する興味深い実験も行われている．弱い測定を用いると，光子の状態にほとんど影響を与えずにその位置や運動量についての情報を得ることができるため，例えば，干渉性を犠牲にせず，光子の経路の情報を得ることができる．また，終状態（例えば二重スリットに実験において，光子がスクリーン上で到達した位置）を指定して，それに至る途中の物理量の情報を得ることもでき，その値を「**弱値**」と呼ぶ[27]．弱い測定のこのような性質を利用すると，裁判での警官を用いた検証実験や「キリバコ」の実験のように，光子の通った経路を軌跡として観測することも可能であり，実際にそのような実験が報告されている[28,29]．ただしこれらの弱い測定を通じた観測は，単一の光子に対する観測ではなく，多数回の測定の平均値として観測されるものであることに注意してほしい．

このように，最近では弱い測定や弱値を用いた新しい測定法によって，「光子の裁判」で論じられた光子の二重性，相補性に対する新しい知見が得られるようになってきている．「光子の裁判」とは，ヤングの二重スリット実験以来，我々科学者を悩ませそして魅了する，古くて新しい問題なのである．

6. おわりに

ここまで，光子の単一性（粒子性），非局所性（波動性），測定・擾乱と量子もつれ，遅延選択，量子消去，弱い測定を用いた実験等々，「光子の裁判」の主題に関わる種々の実験について概観してきた．それでは，いったいどの実験が最も重要で革命的なものだったのだろうか？ 実験家の立場から，筆者は，それは光子の単一性を証明した実験であると思う．それでは，本稿で紹介したそれ以外の実験はどうか？ 本稿ではそれらを状態ベクトルや量子もつれを用いた量子論の枠組みを用いて説明したが，実は，それらの実験結果の多くは光を古典的電磁波として扱っても説明できてしまうことがわかる．単一の光子を用いてそれらの実験を検証することはたいへん重要ではあるが，それらは単一の光子があってこそ意義をもつのである．従って，「光子

の裁判」とそれに続く一連の検証実験を実現するために最も重要だったものは，光子の単一性を確認した実験，換言すれば単一光子源の開発であった，と筆者は考える．現在，このような単一光子源の開発は量子通信や量子コンピュータなどの量子情報通信技術の研究開発においても最重要視されている．「光子の裁判」で行われた検証実験は，フィクションから実証へ，そして応用研究の段階へと発展を遂げつつあるのだ．

参考文献

1) 朝永振一郎：「光子の裁判―ある日の夢―」，朝永振一郎著作集 8『量子力学的世界像』，みすず書房 (1982)．
2) R.H. Brown and R. Twiss: *Proc. Roy. Soc. London A* **243**, 291 (1958).
3) R. Loudon: *The quantum theory of light, 3rd ed.* (Oxford University Press, Oxford, 2000) Chap.6.
4) H.J. Kimble, M. Dagenais, and L. Mandel: *Phys. Rev. Lett.* **39**, 691 (1977).
5) F. Diedrich and H. Walther: *Phys. Rev. Lett.* **58**, 203 (1987).
6) T. Basché *et al.*: *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1516 (1992).
7) R. Brouri *et al.*: *Opt. Lett.* **25**, 1294 (2000).
8) P. Michler *et al.*: *Nature* **406**, 968 (2000).
9) P. Michler *et al.*: *Science* **290**, 2282 (2000).
10) B. Lounis and M. Orrit: *Rep. Prog. Phys.* **68**, 1129 (2005).
11) N. Mizuochi *et al.*: *Nat. Photon.* **6**, 299 (2012).
12) P. Grangier, G. Roger, and A. Aspect: *Europhys. Lett.* **1**, 173 (1986).
13) F. Jelezko *et al.*: *Phys. Rev. A* **67**, 041802 (2003).
14) V Jacques *et al.*: *Eur. Phys. J. D* **35**, 561 (2005).
15) G.J. Milburn: *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2124 (1989).
16) M. Ueda *et al.*: *Phys. Rev. A* **46**, 2859 (1992).
17) N. Matsuda *et al.*: *Nat. Photon.* **3**, 95 (2009).
18) N. Bohr: *Naturwissenschaften*, **16**, 245 (1928).
19) W. Heisenberg: *Z. Phys.* **43**, 172 (1927).
20) M.O. Scully, B.-G. Englert, and H. Walther: *Nature* **351**, 111 (1991).
21) E.P. Storey *et al.*: *Nature* **367**, 626 (1994).
22) H.M. Wiseman *et al.*: *Phys. Rev. A* **56**, 55 (1997).
23) J.A. Wheeler and W.H. Zurek (ed): *Quantum Theory and Measurement*, (Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1983) p.182.
24) V. Jacques *et al.*: *Science* **315**, 966 (2007).
25) M.O. Scully and K Drühl: *Phys. Rev. A* **25**, 2208 (1982).
26) Y.-H. Kim *et al.*: *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1 (2000).
27) Y. Aharonov, D.Z. Albert, and L. Vaidman: *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1351 (1988).
28) S Kocsis *et al.*: *Science* **332**, 1170 (2011).
29) J.S. Lundeen *et al.*: *Nature* **474**, 188 (2011).

（えだまつ・けいいち，東北大学電気通信研究所）

巨視的量子世界からみた「光子の裁判」

仙 場　浩 一

1. はじめに

「光源から放たれた1個の光子が，光源と検出器の間に置かれたスリットの2つの隙間を同時に通過して**自分自身と干渉する！**」これは，朝永先生の短編傑作「光子の裁判」で論争となる中心的なエピソードであり，この話を聞いたとき，「信じられない．そんな，バカな！…」というのが，量子力学を学び始めた誰もが最初に示す反射的な反応であろう．（途中の状態を観測されない限り）単一量子系の異なる複数の可能な時間発展（可能な歴史）が並行して進行し，測定で得られるのは，それらが互いに干渉し合った結果であると解釈せざるを得ない実験事実には，量子力学の不思議さが凝縮されている．

2. シュレディンガーの猫のパラドックス

この事実を受け入れた人が，次に抱く自然な疑問は，「では，多数の原子から構成されている日常の大きさの世界や天体のスケールで，状態の重ね合わせが観測されないのは，なぜだろう？」あるいは，「どの大きさまでこのようなことが起きるのか？」であろう．光子や電子，あるいは，原子1個といった微視的な世界で成立する法則と同じように，私たちの生活する日常の世界で，重ね合わせの状態が観測されたという報告を聞いたことがない．この問題を次のような事例（パラドックス）として最初に指摘したのがシュレディンガーである[1)]．

論文の該当部分には次のように記されている（要約）：「量子力学において，波動関数または状態ベクトル $|\Psi\rangle$ が，電子や原子核など微視的なものの不確定性による“ぼけ”を記述しているうちは全く問題ない．しかし，不確定性が実際に触れることができ，目で見えるような巨視的なものに影響が及ぶ場合，“ぼやけた”という表現は単純に正しくないことに気づき，深刻な懸念が生じる．

…

次のように，まったくおかしな状況を設定することさえ可能である：鋼鉄でできた密室に，一匹の猫を閉じ込める．この部屋には少量の放射性物質を入れたガイガーカウンターと連動して，作動する青酸の入ったフラスコを破壊する装置が仕掛けられている．放射性物質の量はごく少量で，1時間に1回の原子核崩壊が生じる確率と，1回も原子核崩壊が生じない確率が50%ずつであるとする．もし，原子核の崩壊によって放射線が発生し，ガイガーカウンターが放電して放射線を検出すれば，ガイガーカウンターとリレーで連動したハンマーが青酸の入ったフラスコを砕くことになる．もしこの全系を1時間そっとしておいたとすると，その間，もし，原子が1つも崩壊しなかったならば，猫がまだ生きていることになるだろう．このとき全系の波動関数 $|\Psi\rangle$ は，生きている猫と，死んだ猫を等確率で含む状態として表されるのだろうか？」

シュレディンガーの猫のパラドックス（図1）と称されるこの問題は，原子の集合体である巨視的世界と重ね合わせの原理が成立する微視的世界をそのまま関連させたときに非常に奇妙な帰結に至る可能性を鋭く指摘している．

3. 複合分子（フラーレン）を用いた干渉実験

一気に「猫」に到達する前に，光子以外でも今日までに**ド・ブロイ物質波**[2)]の重ね合わせの証拠は，電子[3, 4)]，中

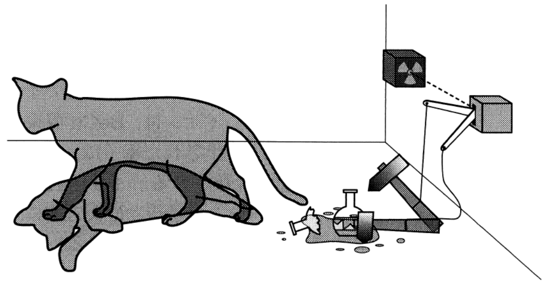


図1　シュレディンガーの猫のパラドックスの説明図．

性子[5]，原子[6]等々に関する実験から，間接的直接的に確認されてきた．中でも，アントン・ザイリンガー率いるウィーン大学グループが1999年に炭素原子60個がサッカーボール状に結合した**フラーレン分子**（C_{60}）を用いて行った物質波の干渉実験[7]は "Wave-particle duality of C_{60} molecules" と題した論文で報告され大きな注目を集めた．この実験について少し詳しく触れておこう．

実験では，市販のフラーレン分子（C_{60}：純度 99.5%）が使用され，それを 900～1000 K に熱せられたオーブンから昇華させ，フラーレンの分子ビームが用意された．オーブン開口部の前に設置された 1.04 m 隔たった一対のスリット（間隙幅はともに約 10 μm）を通過後，一直線に細くコリメートされたフラーレン分子ビームは SiN_x 製の 100 nm 間隔の回折格子を通過し，回折格子から 1.25 m 後方に設置された走査型のレーザ励起イオン化ステージとイオン検出装置を用いて，分子ビームに直交方向の位置が分解能 1 μm で計測された．実験結果は，図 3 に示すように，(b)：回折格子がない場合には，コリメートされたフラーレン分子ビームに対応する 0 次ピークのみが観測されるのに対して，(a)：回折格子がある場合には 0 次ピークの他に 1 次回折ピークが観測された．

ここで，多くの読者の方々は，この実験で使われたフラーレンの分子ビームが，900～1000 K に熱せられたオーブンから昇華によって取り出されたものであることに関連して，「そんなに温度の高い状態で，果たして量子性が現れるのだろうか？」と疑問を持たれるかもしれない．もちろん，論文の著者たちは，この点に関しても考察しており，オーブンから検出器までの飛行時間（約 6 ms，平均速度：220 m/s）に，（黒体輻射分を含め）フラーレン分子から放射されると考えられる赤外線光子数は数個，波長は 7～19 μm であり，図 2 の回折格子の間隔 100 nm よりずっと長いことを指摘している．放出された赤外線光子を測定したとしても，フラーレン分子が回折格子のどの間隙を通過したかを判別することは不可能である．即ち，予想されるエネルギー緩和過程により，フラーレン分子が回折格子の異なる間隙を通過した自分の分身との干渉が阻害されないように，実験が設計されているのである．その後の実験で，C_{70} や，より分子量の大きなフタロシアニン誘導体などでも同様に干渉パターンが観測されることが報告されている[8]．

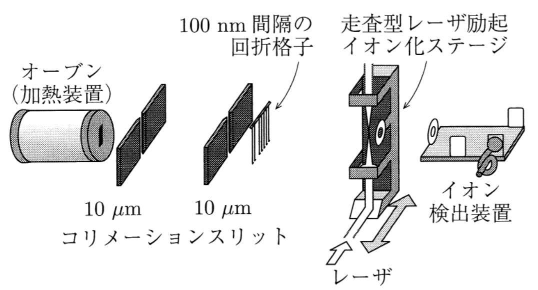


図 2　フラーレン分子の干渉実験の様子を示す模式図（縮尺は非一様）．熱せられた中性のフラーレン分子ビームを取り出すオーブン開口部寸法は：0.33 mm × 1.3 mm × 0.25 mm（幅 × 高さ × 厚さ），1.04 m 離れて設置された一対のコリメータのスリット部寸法は：0.01 mm × 5 mm（幅 × 高さ），2 番目のスリットから 0.1 m の位置に設置された SiN_x 製の回折格子の格子間隔は 100 nm．フラーレン分子は，回折格子の 1.25 m 後方に設置された走査型レーザイオン化装置でイオン化される．そのあと，イオンは，BeCu 収束電極へ向けて加速され，放出された電子は，チャネルトロン電子増倍管で計数される．イオン化用レーザの焦点は，フラーレン分子線と直交方向に 1 μm の分解能で再現性良く走査可能である．すべての装置は 5×10^{-7} mbar の真空チャンバー内に設置されている[7]．

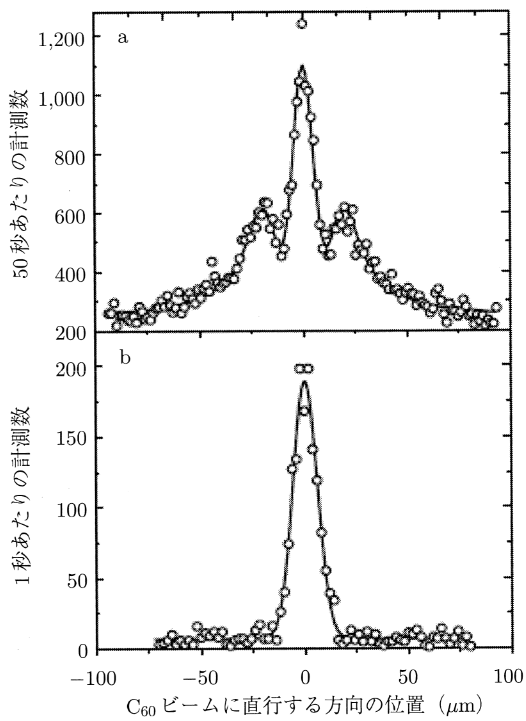


図 3　フラーレン分子の干渉パターン．a：実験値（白丸）と理論フィット（実線）．0 次，1 次回折ピークが観測されている．b：回折格子を除いた場合の実験データ[7]．

4. 巨視的量子現象からのアプローチ

量子効果が，目に見える巨視的スケールで出現する現象として，膨大な数の粒子が単一の量子状態に凝縮した，超流動や超伝導，ボース・アインシュタイン凝縮（BEC）等の**巨視的量子状態**が知られている．この現象（特に超伝導状態と dc-**SQUID** 回路：Superconducting QUantum Interference Device：超伝導量子干渉計）を用いて，「光子の裁判」の巨視的バージョンの実験（**シュレディンガー方程式の線形性が任意の複雑な系へ拡張可能であるという仮説の検証**）が，1980年に Anthony J. Leggett によって提案された[9]．低温で散逸の影響が非常に小さくなり，純粋な量子性が保てると期待される超伝導系（特に SQUID リング）を使い，巨視的に異なった性質を持つ状態間での量子トンネル現象や量子コヒーレント振動を測定することが，最も有望な実験となるであろうと提案したのであった．

Leggett の提案から 20 年近くが経とうとした 1999 年に報告された，日本の NEC グループ（中村・Pashkin・蔡）の記念碑的な実験によって，微小ジョセフソン接合を含む超伝導回路の電子状態が離散スペクトルを示し，準位間のエネルギー差に共鳴したマイクロ波（パルス）によって量子遷移（量子状態操作）が制御可能なこと（ラビ振動）が示され，大きな驚きで迎えられた[10]．また，2002 年には，Leggett のオリジナルな提案により近い超伝導磁束量子ビット（ジョセフソン接合を 3～4 個含む SQUID ループ）においても，おおよそ 0.5 μA の超伝導電流が SQUID ループを時計回りに流れている状態と，反時計回りに流れている巨視的に異なった 2 状態間での量子コヒーレント振動（巨視的量子コヒーレンス）も観測された[11]．希釈冷凍機を使って mK の温度領域に超伝導回路を冷却する必要はあるが，従来，核磁気共鳴や原子分光でのみ観測されるような美しいラビ振動や Ramsey 縞が，今日では，目に見える大きさの電気回路の電子状態のダイナミックスとして，実験室では日常的に観測できるようになった．

5. 異種の巨視的量子系間での量子コヒーレント振動

ここでは，私たち（国立情報学研究所，NTT，大阪大学）共同研究グループが最近成功した 0.3 μA 程度の電流が回路を流れている巨視的量子二準位系である超伝導磁束量子ビットと，数千万個の電子スピン集団という異なる種類の巨視的量子系の間で観測されたコヒーレント（量子もつれ）振動の実験に関して詳しくご紹介したい[12,13]．

5.1 ダイヤモンド NV 中心

ダイヤモンドは，炭素を硼素が置換すると青，窒素が置換すると黄色など，それぞれ特有の波長で蛍光を発するカラーセンターを形成することが知られている．中でも，窒素（N）と空孔（Vacancy）が隣り合った複合欠陥は，**NV センター**と呼ばれ（図 4 (a)），電子を 1 個捕獲した NV^- 状態は，バンドギャップ中に存在する電子状態のために，637 nm で赤い蛍光を発することが知られており，ダイヤモンドにピンク色に近い色を生じさせる色中心でもある．図 4 に示すように，NV^- の基底状態は，$S = 1$ のスピン三重項状態であり，スピン間相互作用によって，ゼロ磁場で 2.88 GHz に相当するエネルギー分裂が生じている（図 4 (b)）．これは，超伝導量子ビットと同程度のエネルギー準位差であり，強磁場を印可すると壊れてしまうという弱点を持つ超伝導量子ビットとの結合には，大変好都合な電子スピン系であるといえる．この電子スピンは，室温で 2 ms のコヒーレンス時間を示すことが知られている．また，2.88 GHz のエネルギー分裂は，超伝導量子ビットのエネルギースケールと一致していて，両者間の量子情報の書き込み・読み出し動作に適している．このような理由から，ダイヤモンド NV 中心の電子スピンと超伝導回路を用いて強結合を実現させようとする試みが提案されてきた[14]．

5.2 超伝導磁束量子ビットの操作と測定

超伝導磁束量子ビットの作る量子二準位系のハミルトニアンは近似的に

$$H = \frac{\hbar}{2}(\epsilon\sigma_z + \Delta\sigma_x)$$

と書き表すことができる．超伝導磁束量子ビットを貫く外部からの磁束によって ϵ を操作することができるので共鳴マイクロ波との間に磁気的な結合を作ることで量子ビットに遷移を引き起こすことができる．また σ_z の固有状態である $|L\rangle$, $|R\rangle$ 状態はそれぞれ超伝導

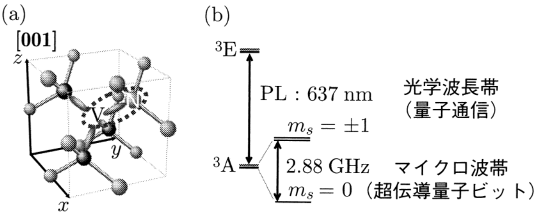


図 4　(a) ダイヤモンド結晶中の NV 中心，(b) NV 中心のエネルギー準位[12,13,16]．

磁束量子ビットのループを流れる超伝導電流が左回りと右回りの状態に対応する．この超伝導電流によって微小磁場が生じるためこれを検出することによって超伝導磁束量子ビットの状態測定が可能になる．

今回の実験で私たちが量子状態の測定に用いたのは微小超伝導電流の作る磁場を量子ビットと磁気的に超伝導量子干渉素子（SQUID）とに結合させ適切なバイアス電流を流すことによって量子ビットの作る電流の向きによってSQUIDの超伝導状態と電圧状態に分かれるようにし，SQUIDに発生する電圧を読み取ることによって量子状態を測定する方法である．

5.3 ギャップ可変型磁束量子ビット

超伝導磁束量子ビットは3つのジョセフソン接合を含む超伝導（アルミニウム）ループから構成されている．3つの接合のうち1つだけを接合面積比（$\propto$ ジョセフソンエネルギー E_J）が約 $\alpha = 0.8$ 倍になるように設計されている（図4(a)）．ループを貫く外部磁束 Φ_ex を $(m+1/2)\Phi_0$（m は整数，Φ_0 は磁束量子）近傍にセットすると，系は量子二準位系として振る舞う．図5(a)に $\Phi_\mathrm{ex} \approx 1.5\Phi_0$ での系のエネルギー準位を示す．外部磁束 Φ_ex が $1.5\Phi_0$ から離れると，超伝導電流 $I_\mathrm{P} \approx 300\,\mathrm{nA}$ がループを右回りに流れる状態 $|R\rangle$ と左回りに流れる状態 $|L\rangle$ がエネルギー固有状態となる．$\Phi_\mathrm{ex} = 1.5\Phi_0$ では，接合の帯電エネルギーに起因するトンネル効果で，$|L\rangle$ と $|R\rangle$ の重ね合わせ状態がエネルギー固有状態を構成している．磁束量子ビットの励起状態と基底状態のエネルギー差は，$\Phi_\mathrm{ex} = 1.5\Phi_0$ で極小を示し，外部からの磁場ノイズに対し最も安定化し，量子ビットのコヒーレンス時間が最長となるため，この外部磁束は最適動作点と呼ばれている．最適動作点でのエネルギー差 Δ は，接合面積比 α によって決まり，通常の場合，試料作製後に制御することはできない．そこで，最適動作点で量子ビットを動作しつつ，他の量子系（例えば $\mathrm{NV^-}$ 中心等）が持つエネルギーと共鳴させるために，最小接合をdc-SQUIDで置き換える（図5(b)）．すると，このSQUIDを貫く外部磁束 Φ_α により，SQUIDの E_J を実効的に制御することができるようになり，ナノ秒未満での非常に高速な Δ 制御がその場で，試料をmKの低温に冷やしたまま可能となる[15]．コヒーレンス特性だけでなく，制御性も良い磁束量子ビットの場合，典型的な Δ の値は1〜10 GHz程度なので，ダイヤモンドの $\mathrm{NV^-}$ 中心との相性が非常に良いことが判る．

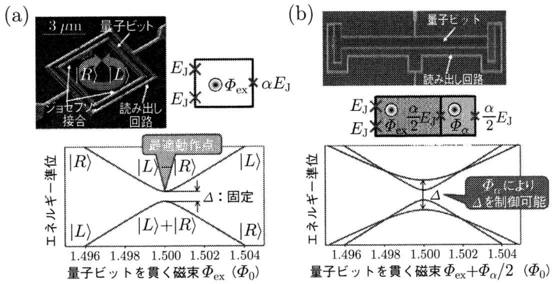


図5　(a) 超伝導磁束量子ビット（上）とそのエネルギー準位（下），(b) ギャップ可変型超伝導磁束量子ビット（上）とそのエネルギー準位（下）[12, 13, 16]．

5.4 超伝導磁束量子ビットとダイヤモンドNV中心の強結合

磁束量子ビットと $\mathrm{NV^-}$ 中心の電子スピンとの結合強度は，量子ビットの超伝導電流 I_P が作り出す磁場と電子スピンとの磁気的な結合で決まるため，強結合を達成するためには，両者間の距離を短くすることが重要である．さらに，複数の電子スピンは磁束量子ビットと協調的に結合するため，N 個の電子スピンと結合すると，結合強度が $\sqrt{N}$ 倍になる．つまり，高密度の $\mathrm{NV^-}$ 中心を含むダイヤモンド結晶を準備することが重要になる．ここは，強結合を達成する際の重要な部分なので，少し詳しく説明しよう．磁束量子ビットと個々の $\mathrm{NV^-}$ 中心の電子スピンとの相互作用ハミルトニアンを $H_\mathrm{int} = \sum_{i=1}^{N} g_i(\hat{\sigma}_+^{(i)}\hat{\sigma}_-^{(\mathrm{qb})} + \hat{\sigma}_-^{(i)}\hat{\sigma}_+^{(\mathrm{qb})})$ のように仮定する．ここで $\sigma_\pm$ は，スピンの昇降演算子である．g_i は磁束量子ビットと個々の $\mathrm{NV^-}$ 中心の電子スピンとの結合定数であり，必ずしも等しくなくても構わない．ここで，N 個の電子スピンで構成される新たなスピン昇降演算子を次式 $\hat{S}_+ = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}|g_i|^2}}\sum_{i=1}^{N} g_i\hat{\sigma}_+^{(i)}$ のように定義すると，相互作用ハミルトニアンは，この $S_\pm$ を用いて，$H = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}|g_i|^2}\,(\hat{S}_+\hat{\sigma}_-^{(\mathrm{qb})} + S_-\hat{\sigma}_+^{(\mathrm{qb})})$ と書くことができ，これをスピン系の基底状態（$|0\rangle_\mathrm{ens}$）に S_+ が作用して生じる多数のスピン集団の一励起状態の重ね合わせ状態Dicke状態（$|1\rangle_\mathrm{ens} = S_+|0\rangle_\mathrm{ens}$）と磁束量子ビットの二状態（$|0\rangle_\mathrm{qb}, |1\rangle_\mathrm{qb}$）で記述されるJaynes–Cummingsモデルと見なすことができ，相互作用はおおよそ $\sqrt{N}$ 倍に増強される（すべての g_i が等しい場合は，厳密に $\sqrt{N}$ 倍になる：スピンの集団を用いた相互作用増強効果）．ここで，添え字のqb, ensは，それぞれ量子ビット，スピン集団を表し，0, 1は，基底状態と励起状態を表す．

本研究では，100 ppm近い窒素不純物を含む，高温高圧（HPHT）合成ダイヤモンドに，炭素イオンを注

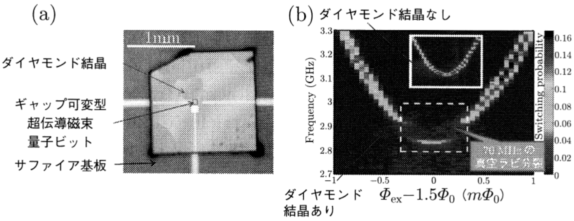


図 6　(a) 超伝導・ダイヤモンド複合系，(b) 超伝導磁束量子ビットの分光測定[12, 13, 16]．

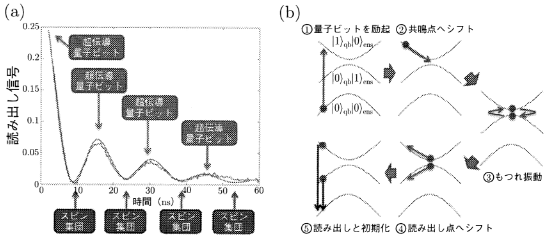


図 7　(a) 超伝導量子ビットと NV スピン集団間の量子もつれ振動，(b) 量子もつれ振動を観測するための手法[12, 13, 16]．

入し，真空中でアニールすることにより高密度の NV^- 中心を形成した．蛍光分光測定を用い，単一の NV^- 中心からの発光強度との比較から，NV^- 中心の密度は $1.1\times10^{18}\,\mathrm{cm}^{-3}$ と見積もられた．

超伝導磁束量子ビットは，サファイア基板上に，電子線描画法，斜め蒸着法を用いて作製，この基板上にダイヤモンド結晶を貼り付けた．非常に単純な方法だが，表面の清浄性を保ち，注意深く貼り付けることで，$1\,\mu\mathrm{m}$ 未満の基板との間隔が実現可能となる．図 6 (a) に貼り合わせた試料の写真を示す．実現されている空間配置にビオ・サバールの法則を適応して見積もられる，単一の電子スピンと磁束量子ビットとの結合強度 g_i は約 4.4 kHz．磁束量子ビット直上の NV ダイヤモンド層の体積と NV^- 中心の密度から，この協調的結合に携わっている NV^- 中心の数は 6×10^7 個程度と見積もられ，これより電子スピン集団との結合強度 g_{ens0} を求めると約 35 MHz となる[12, 13]．

5.5 実験結果

● 分光測定

測定は希釈冷凍機を用い，ベース温度〜12 mK で行った．ダイヤモンド結晶を貼り付けた磁束量子ビット試料のマイクロ波による分光測定には，最適動作点近傍にエネルギー分裂が見られる（図 6 (b)）．分裂の中心周波数 2.878 GHz は，NV^- 中心のゼロ磁場分裂とよく一致している．一方，ダイヤモンド試料を貼り付ける前の分光測定では，分裂は見られていない（図 6 (b) 挿入図）．以上の結果より，観測された分裂は，磁束量子ビットとダイヤモンド中の電子スピン集団との強結合によるラビ分裂であることが判る．スピン集団との結合強度 g_{ens} は，ラビ分裂の半値で表されるが，NV^- 中心の密度から見積もった結合強度 g_{ens0} とよく一致している．

● 時間領域測定

磁束量子ビットから電子スピン集団への量子情報の書き込み・読み出し動作を実証するために，図 7 (b) に示す手法を用いて，時間領域の実験を行なった．まず，Φ_{ex} を制御し，量子ビットとスピン集団が十分離調している状態でマイクロ波パルスを照射し，量子ビットのみを励起状態に準備する（①）．次に，非断熱的にすばやく Φ_{ex} を制御し，量子ビットとスピン集団を共鳴させる（②）．このとき，Φ_{ex} の変化が結合強度 g_{ens} に比べて十分に速いと，非断熱的遷移が起こり，量子ビットとスピン集団間で，以下のように量子 1 個分のエネルギーの交換である，真空ラビ振動と呼ばれる量子もつれ振動（周波数 $2g_{\mathrm{ens}}$）が生じる（③）．

$$|1\rangle_{\mathrm{qb}}|0\rangle_{\mathrm{ens}} \Longleftrightarrow |0\rangle_{\mathrm{qb}}|1\rangle_{\mathrm{ens}}.$$

最後に，再び量子ビットとスピン集団を非断熱的に離調し（④），読み出し回路を用いて量子ビットの状態を測定する（⑤）．

図 7 (a) に量子もつれ振動の測定結果を示す．この振動パターンの各時間のデータは，その時間で数万回測定を行って得た平均値をプロットしたものである．すなわち，この結合系の状態は一般に，$|\Psi\rangle = \alpha|1\rangle_{\mathrm{qb}}|0\rangle_{\mathrm{ens}} + \beta|0\rangle_{\mathrm{qb}}|1\rangle_{\mathrm{ens}} (|\alpha|^2+|\beta|^2=1)$ と表されるが，毎回の測定結果は，$|1\rangle_{\mathrm{qb}}|0\rangle_{\mathrm{ens}}$ または，$|0\rangle_{\mathrm{qb}}|1\rangle_{\mathrm{ens}}$ のいずれか一方なのである．この実験結果が示すことは，巨視的に識別可能な超伝導磁束量子ビットの 2 つの状態（$|1\rangle_{\mathrm{qb}}$ または $|0\rangle_{\mathrm{qb}}$）と数千万個の NV スピン集団の 2 つの Dicke 状態（$|0\rangle_{\mathrm{ens}}$ または $|1\rangle_{\mathrm{ens}}$）との組み合わせで表される**結合系の状態が重ね合わされた「もつれ状態」（線形結合状態）**にあったと考えられるということである．

6. 終わりに

朝永先生の名著「光子の裁判」を久しぶりに読み返す機会をいただき，量子力学を学び初めの頃，波乃光子の辣腕弁護人ディラック氏の緻密な論理で，量子の世界で

は否応なく日常の感覚と全く異なる現象が生じていると説得させられる傍聴人の立場で一気に読んだ大学時代を思い出した．朝永先生方による邦訳でもディラック先生の教科書のほうは一気には読めなかったけれども．

本解説では，電子，原子，に始まる，単一量子系物質波のダブルスリット実験に代表される**波と粒子の二重性**の適用範囲は，今日，フラーレン分子や巨視的世界のメカニカル振動子[17)]，超伝導量子ビットさらにハイブリッド量子系へと着々とその領域を広げてきたことを概観した．既成概念を根本から覆した量子測定に関して，「あの月は，誰も観測していないとき存在しないと思いますか？」という，「猫」を飛び越したアインシュタインの言葉に象徴されるような，「私たちは，実は，とても神秘的な巨視的量子世界に住んでいる！」という事実に気づいたときの初心を大切にしたいと思う．

謝辞

本解説の執筆にあたり，日頃から大変有益な議論をしていただいている共同研究者であるNTT物性研究所の齊藤志郎氏，角柳孝輔氏，William John Munro氏，松崎雄一郎氏，中ノ勇人氏，大阪大学大学院基礎工学研究科の水落憲和氏，国立情報学研究所の根本香絵氏に深く感謝します．

本研究は，内閣府/日本学術振興会・最先端研究開発支援プログラム「量子情報処理プロジェクト」の支援および，JSPS科研費，研究課題番号：22241025「超伝導人工原子を用いた量子メモリーの研究」，研究課題番号：25220601「巨視的量子系を用いた量子物理」の助成を受けたものです．図4〜図7とその解説部分は，著者らがNTT技術ジャーナル誌に発表した内容[16)]を許可を得て，転載したものです．

参考文献

1) E. Schrödinger, *Naturwiss*, **23**, 807 (1935). 猫の段落の英訳：http://www.tu-harburg.de/rzt/rzt/it/QM/cat.html#sect5
2) de Broglie, L. "Waves and quanta", *Nature*, **112**, 540 (1923).
3) Davisson, C.J. & Germer, L.H., "The scattering of electron by a single crystal of nickel", *Nature*, **119**, 558–560 (1927).
4) 日立中央研究所 外村彰先生の研究室で観測された電子の二重スリット実験の説明と実験の動画，http://www.hitachi.co.jp/rd/portal/research/em/doubleslit.html
5) Halban, H.v.Jr. & Preiswerk, P., "Preuve experimentale de la diffraction des neutrons", *C.R. Acad. Sci.*, **203**, 73–75 (1936).
6) Estermann, I, & Stern, O., "Beugung von Molekularstrahlen", *Z. Phys.*, **61**, 95–125 (1930).
7) Markus Arndt, Olaf Nairz, Julian Vos-Andreae, Claudia Keller, Gerbrand van der Zouw & Anton Zeillinger, "Wave-particle duality of C_{60} molecules", *Nature*, **401**, 680–682 (1999).
8) Juffmann, T. *et al.*, "Real-time single-molecule imaging of quantum interface", *Nature Nanotech* **7**, 297–300 (2012).
9) A.J. Leggett, "Macroscopic Quantum System and the Quantum Theory of Measurement", *Supplement of the Progress of Theoretical Physics*, **69**, 80 (1980).
10) Y. Nakamura, Y.A. Pashkin, and J.S. Tsai, "Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box", *Nature*, **398**, 786–788 (1999).
11) I. Chiorescu, Y. Nakamura, C.J.P.M. Harmans, J.E. Mooij, "Coherent Quantum Dynamics ofa Superconducting Flux Qubit", *Science*, **299**, 1869–1871 (2003).
12) X. Zhu, S. Saito, A. Kemp, K. Kakuyanagi, S. Karimoto, H. Nakano, W.J. Munro, Y. Tokura, M.S. Everitt, K. Nemoto, M. Kasu, N. Mizuochi, and K. Semba: "Coherent coupling of a superconducting flux qubit to an electron spin ensemble in diamond", *Nature*, **478**, 221–224 (2011).
13) S. Saito, X. Zhu, R. Amsüss, Y. Matsuzaki, K. Kakuyanagi, T. Shimo-Oka, N. Mizuochi, K. Nemoto, W.J. Munro, K. Semba, "Towards Realizing a Quantum Memory for a Superconducting Qubit: Storage and Retrieval of quantum states", *Phys. Rev. Lett.*, **111**, 107008 (2013).
14) D. Marcos, M. Wubs, J.M. Taylor, R. Aguado, M.D. Lukin, and A.S. Sørensen, *Phys. Rev. Lett.*, **105**, 210501 (2010). この提案からダイヤモンドNV中心スピン集団と超伝導磁束量子ビットのハイブリッド系の実験までの経緯は下記URLを参照ください．http://www.ntt.co.jp/journal/1201/files/jn201201063.pdf
15) X. Zhu, A. Kemp, S. Saito, and K. Semba: "Coherent operation of a gap-tunable flux qubit", *Appl. Phys. Lett.*, **97**, 102503 (2010).
16) 齊藤志郎，X. Zhu, W.J. Munro, 仙場浩一，「超伝導量子ビットとスピン集団のコヒーレント結合」NTT技術ジャーナル, Vol.**24**, No.6, pp.13–17, 2012. http://www.ntt.co.jp/journal/1206/files/jn201206013.pdf
17) 半導体微細加工技術で作製された，微細な弦やドラム等の複数の系で振動（phonon）基底状態が実現され，量子操作が実現されている．例えば，超伝導量子ビットとの強結合により，約6.2 GHzの機械振動子の量子状態操作にUCSBのAndrew ClelandとJohn Martinisの共同研究チームが成功している：A.D. O'Connell *et al.*, "Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator", *Nature*, **464**, 697–703 (2010).

（せんば・こういち，情報通信研究機構未来ICT研究所）

「光子の裁判」と宇宙の古典性

南部　保貞

1. 宇宙の構造の起源

我々の宇宙には，星，銀河，銀河団，超銀河団などの多種多様な構造が存在している．現在の宇宙論のシナリオによれば，我々の宇宙は**インフレーション**とよばれる空間の加速的膨張期に引き続く熱い火の玉状態（ビッグバン）から進化してきたと考えられている．宇宙の膨張に伴い，ごく小さな時空のゆらぎが重力不安定性によって徐々に成長してゆき，最終的に今の宇宙の構造が形成された．本稿では，インフレーション中の量子効果によって生み出される初期ゆらぎの性質について考えてみたい．このゆらぎが我々の宇宙の大規模構造の種となったと考えられている．

インフレーションの具体例として加速膨張がスカラー場（インフラトン）によって引き起こされている宇宙を用意し，その上での量子ゆらぎの振舞いを考えてみよう．ゆらぎの変数としては一様等方宇宙からのずれを表すゲージ不変量を用いる．スカラー場に対して真空状態を仮定したとき，そのゆらぎ $\delta\phi$ に対する同時刻 2 点相関関数は次式で与えられる[*1)]：

$$\langle\delta\phi(\boldsymbol{x})\delta\phi(\boldsymbol{y})\rangle \approx \frac{\hbar}{4\pi^2 r_p^2} - \frac{\hbar H^2}{4\pi^2}\ln(Hr_p) + \frac{\hbar H^3 t}{4\pi^2}. \tag{1}$$

ここで $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は 2 点の共動座標，$r_p = e^{Ht}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ は 2 点間の物理的距離，H はハッブルパラメーターである．第 1 項は，宇宙膨張がないミンコフスキー時空においても存在する真空のゼロ点振動に起因する相関であり，2 点間距離に対して $\propto r_p^{-2}$ のようにべき的に減少する．一方，第 2，第 3 項はインフレーション宇宙特有の相関であり $r_p \gtrsim H^{-1}$ において相関の大きさは $\sim \hbar H^2$ となり，対数的な弱い距離依存性を持つ．これはハッブル長さ H^{-1} より大スケールにおいてほぼスケールに依存しないスカラー場の量子ゆらぎが存在することを意味する．その大きさは空間の曲率ゆらぎ $\mathcal{R}$ に換算すると次の公式で与えられる：

$$\langle\mathcal{R}^2\rangle \sim \hbar\left(\frac{H^2}{\dot{\phi}}\right)^2. \tag{2}$$

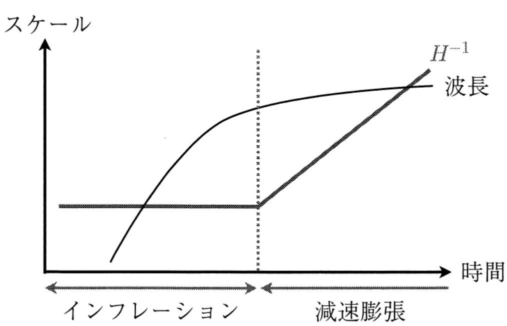


図 1　インフレーション宇宙においては空間のスケール（波長）は時間と共に $\propto e^{Ht}$ と変化する．ハッブルパラメーター H は宇宙の膨張率をあらわし，ハッブル長さ H^{-1} は膨張宇宙での特徴的な長さを与える．

*1）　本稿で考えるスカラー場は，質量を持たず時空曲率との結合がないものとする．

ここで $\dot{\phi}$ はインフラトン場の一様成分の時間変化を表す．インフラトンが1種類のモデルでは，波数依存性は非常に弱い形でしか入らず，ほぼスケールによらない量子起源の曲率ゆらぎを予言することになる．インフレーションによって生み出された曲率ゆらぎは，宇宙の晴れ上がり時以降に宇宙背景放射の温度ゆらぎとして観測されることとなる．さらにこの曲率ゆらぎを種として，重力不安定性に基づく非一様性の成長進化がおこり，現在の我々の宇宙の構造につながったと考えられている．

(2) の公式は量子論的に導出された量子ゆらぎの大きさを与えるものである．このゆらぎを初期条件として，それ以後の純粋に古典的なゆらぎの成長進化につなげるためには，量子ゆらぎがその量子性を失い古典量として振る舞っていなければならない．インフレーションにおいては宇宙の加速膨張のために，ゆらぎを波数分解した各波数モードに対する物理的波長は時間とともに引き延ばされてゆき，いずれハッブル長さ H^{-1} を越してしまう（図 1）．ゆらぎの各波数モードが本来兼ね備えていた時間に関する振動的振舞い（波動的振舞い）は，物理的波長がハッブル長さを越した時点で失われてしまい，ゆらぎの振動は凍り付いてしまう（図 2）．

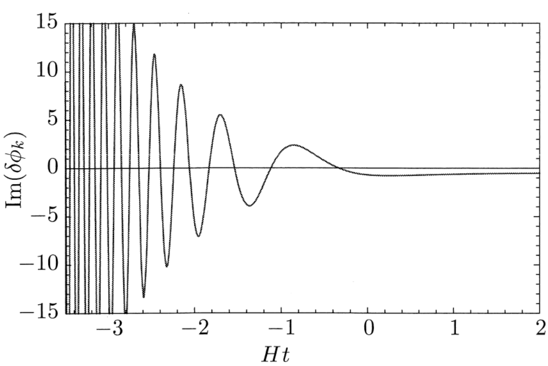


図 2　スカラー場のゆらぎの波数モード $\delta\phi_k$ の時間発展．物理的波長がハッブル長さ H^{-1} を超えると（$t \sim 0$），振動的振舞いが失われる．

ゆらぎが凍り付いた時点において，量子ゆらぎを古典的なゆらぎであるとみなすことで（古典量に置き換えることで）古典的な物理法則で支配される構造形成の初期条件として採用するわけである．

ここで考えたいのは，量子ゆらぎを古典ゆらぎとみなせる正当性（量子ゆらぎの古典化問題[1]）である．

2. 初期ゆらぎの古典性

量子ゆらぎが古典的に振る舞うための条件はどのようなものであろうか？ インフレーション中では，宇宙の加速膨張のためゆらぎの各波数モードの波長が急激に引き延ばされ，その結果としてゆらぎの振動が凍り付いてしまうのであった．これは別の言い方をすれば，空間の急激な膨張によって粒子がない真空状態から粒子が生成されることに対応する．この状況で物理量の期待値を計算すると，量子力学的な非可換性が実質的に無視できるようになり，量子力学的な期待値を古典的な確率変数に対する期待値に置き換えることが可能となる[2]．量子力学的な期待値と同じ答えを与える古典確率分布関数が存在可能になるという意味で，インフレーション時に生成される量子的ゆらぎは“古典的” であるとみなすことができる．

しかしながら，この解釈では “古典的” ゆらぎが持ち得ない量子力学的な干渉性がどのように失われたかを説明できない．古典的世界では．量子論の持っていた状態の重ね合わせが何らかのメカニズムによって禁止されていると考えられている．それを説明する考え方の1つがデコヒーレンスである．着目している系と相互作用している外部系を考えることによって，着目している系の状態は，重ね合わせを許す純粋状態からそれを許さない混合状態に発展し得る．これは外部系との相互作用を通じて，量子力学的干渉が失われてゆくためである．インフレーション中の量子ゆらぎに対しても，デコヒーレンスの立場からその量子性が失われ古典ゆらぎに転化するという議論は行なわれているが，どのようなタイプの相互作用を仮定するのか，どの変数に対して古典性を主張するのかなどの不定性がある．

3.「光子の裁判」における量子性と古典性

「光子の裁判」[3]では光子１個による干渉実験を考えることで，量子力学における粒子と波動の２重性をデモンストレートしている．この設定を借りて，光子が量子的であるか古典的であるかの区別を考えてみよう．図３のように左から光子を１個だけ入射させて，スクリーンのどの場所に到達したかを記録する．

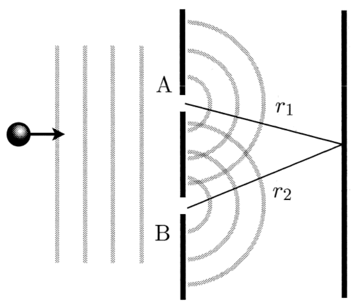


図３　光子１個による干渉実験．

スクリーン上では粒子としての１個の光子が到達した場所に小さなスポットが現れる．この操作を何回も繰り返すと，スクリーン上には光子の到達した痕跡であるたくさんのスポットの集まりからなるパターン（光の強度分布）が得られる．このパターンを求めてみよう．１個の光子は分裂できないので，光子がスリットを通る方法としてはＡを通りＢを通らない場合（これを $|1\rangle_A|0\rangle_B$ と表現する）と，Ａを通らずＢを通る場合（$|0\rangle_A|1\rangle_B$ と表現する）のいずれかである．つまり光子の状態は

$$|\Psi\rangle_{AB} = c_A|1\rangle_A|0\rangle_B + c_B|0\rangle_A|1\rangle_B \qquad (3)$$

と書ける．c_A, c_B は $|c_A|^2 + |c_B|^2 = 1$ を満たす定数である．スリットＡとＢを光源とみなせば，スクリーン上Ｐでの電場（の正振動部分）は

$$E^{(+)} = \hat{a}_A\, e^{ikr_1} + \hat{a}_B\, e^{ikr_2} \qquad (4)$$

である．ここで $\hat{a}_A, \hat{a}_B$ はスリットＡ, Ｂを光源とみなしたときの光子の消滅演算子，e^{ikr_1}, e^{ikr_2} はスリットからスクリーンまでの光の伝播に伴う位相因子である．スクリーン上での光の強度は，光子の状態 (3) を用いて電場の強度の期待値を求めることで

$$\langle E^{(-)}E^{(+)}\rangle = |c_A|^2 + |c_B|^2 + 2|c_A c_B|\cos(k(r_1 - r_2) + \theta_0) \quad (5)$$

と得られる．θ_0 は c_A, c_B から決まる位相である．$c_A \neq 0$ かつ $c_B \neq 0$ ならば，スクリーン上の場所に応じて電場強度が変化し干渉縞が現れる．$c_A = 0$ または $c_B = 0$ ならば，振動項がなくなるため干渉縞は現れない．つまり何らかの方法で１個の光子がＡ, Ｂどちらを通ったかが判定できる場合には干渉縞は消えてしまう．光子の状態との対応で言い直してみると，$c_A \neq 0$ かつ $c_B \neq 0$ の場合は状態 (3) はＡの状態とＢの状態のかけ算の形では書けない．このような状態を**エンタングルした状態**とよぶ．このときは干渉縞は現れる．一方，$c_A = 0$ あるいは $c_B = 0$ の場合は状態 (3) はＡの状態とＢの状態のかけ算となり**分離可能な状態**とよぶ．これは状態の形から明らかなように，光子がＡあるいはＢのどちらの経路を通るかが判定できる場合に対応している．このときは干渉縞は消える．

光子を粒子であるとみなすと，この粒子が古典的であるか量子的であるかの区別はどのようにされるのであろうか？ 粒子が古典的であればその運動の経路は１つに確定しており，スクリーン上には干渉縞は現れない．よって，粒子が量子的であるか否かを干渉縞が現れるか否かをもって判断すれば，光源ＡとＢの状態がエンタングルしていれば光子は量子的であり，ＡとＢの状態が分離可能であれば光子の状態は古典的であるとよぶことができる．

4. 量子場のエンタングルメント

「光子の裁判」の例から推測できるように，２体系が量子的であるか古典的であるかを区別するのに分離可能性あるいはエンタングルメントの考え方が使えそうである．ここでは，量子的な２体間

相関（2体間エンタングルメント）の観点から，初期ゆらぎの古典性について考えてみよう．先ほどは状態ベクトルに対しての分離可能性を定義したが，より一般的には密度演算子に対する定義に拡張される．2つの部分系 A, B を持つ2体系 AB の状態が次のようにテンソル積の和の形

$$\rho_{\mathrm{AB}} = \sum_j w_j \rho_{\mathrm{A}}^j \otimes \rho_{\mathrm{B}}^j \tag{6}$$

で書けるとき，2体系 AB は分離可能であると定義する．w_i は $\sum_j w_j = 1$, $w_j \geq 0$ をみたす係数である．状態がこのような形に書けないときに2体系 AB はエンタングルしているとよぶ．エンタングルした量子状態は，局所的な隠れた変数で記述可能な古典系に比べてより大きな相関を持つことができ，この性質はベル不等式の破れとして2体相関関数に対する関係式として表現される[4]．2体系に対しては，エンタングルメントの有無に関してかなり厳密な評価を行なうことができる．それぞれの部分系が1自由度連続変数に対するガウス状態*2)であるとしよう．全系は次の正準変数（演算子）を用いて表現できる：

$$\hat{\xi}_i = (\hat{q}_{\mathrm{A}}, \hat{p}_{\mathrm{A}}, \hat{q}_{\mathrm{B}}, \hat{p}_{\mathrm{B}}), \quad [\hat{\xi}_j, \hat{\xi}_k] = i\hbar\,\Omega_{jk}. \tag{7}$$

ここで $\boldsymbol{\Omega}$ はシンプレクティク行列とよばれる 4×4 の定数行列である：

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ガウス状態は正準変数間の共分散を用いて定義される共変行列

$$V_{jk} = \frac{1}{2}\langle \hat{\xi}_j \hat{\xi}_k + \hat{\xi}_k \hat{\xi}_j \rangle \tag{8}$$

で完全に決定される．ここで $\langle\cdots\rangle$ は系の状態についての期待値を表す．行列 V_{jk} を関係 $\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\Omega}$ を満たすシンプレクティク変換 $\boldsymbol{S}$ を用いて対角化したときの固有値を**シンプレクティク固有値**とよぶ：

$$\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{S} = \mathrm{diag}(\nu_+, \nu_+, \nu_-, \nu_-). \tag{9}$$

固有値の大きさは $\nu_+ \geq \nu_- > 0$ である．物理的状態（密度演算子の固有値が正）に対して，シンプレクティク固有値は不等式

$$\nu_- \geq \frac{\hbar}{2} \quad （状態の正値性） \tag{10}$$

を満たす．2体系の部分系であるそれぞれの1体系に対しては，状態の正値性は通常の不確定性関係 $\langle \hat{q}^2_{\mathrm{A,B}} \rangle \langle \hat{p}^2_{\mathrm{A,B}} \rangle \geq \hbar^2/4$ に帰着する．さて，ガウス状態の2体系の分離可能性については，次の関係が成立することがわかっている[5]：

$$系が分離可能 \;\Leftrightarrow\; \tilde{\nu}_- \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{11}$$

ここで $\tilde{\nu}_-$ は部分系 B に対して $p_{\mathrm{B}} \to -p_{\mathrm{B}}$ とした状態（部分転置を取った状態）に対するシンプレクティク固有値の小さいほうの値である．この定理によれば $\tilde{\nu}_-$ が $\hbar/2$ を超えなければこの2体系はエンタングルしていると判定できる．

以上の道具を用いて，場の量子ゆらぎに対するエンタングルメントを定量化する方法を考えてみよう．場そのものは自由度が無限大であるから，2体間エンタングルメントを定義するためには何らかの方法でその自由度を落としてやる必要がある．ここでは場を平均化（粗視化）することで2体系を定義することにしよう．場をフーリエ分解して波数モードの和の形に表す．波数の和を波数の大きさ $|\boldsymbol{k}| \leq k_c$ のみに制限すると，この操作は粗視化の1つの方法を与える．空間1次元の例で考えると粗視化された場は

$$\hat{\varphi}(x,t) = \int_{-k_c}^{k_c} dk\, \hat{\varphi}_k\, e^{ikx} \tag{12}$$

で定義される．k_c は紫外のカットオフ（最も短い波長）に対応する．この操作によって空間サイズ $\sim 1/k_c$ より小さな構造をならした場が定義される．場の共役運動量に対しても，同じ操作で粗視化を定義しておく．空間距離が r だけ離れた2点 A, B における場とその共役変数の組

*2) ガウス状態とは密度演算子がガウス関数で表現できる状態で，調和振動子の基底状態，コヒーレント状態，スクイーズド状態などが相当する．

$\hat{\boldsymbol{\xi}} = (\hat{\varphi}_{\mathrm{A}}, \hat{p}_{\mathrm{A}}, \hat{\varphi}_{\mathrm{B}}, \hat{p}_{\mathrm{B}})$ が正準交換関係を満たし 2 体系の正準変数の組となるためには，A, B 間の距離 r と粗視化のスケール k_c の間に関係式

$$r = \frac{\pi}{k_c} n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{13}$$

が成立する必要があることがわかる[6]．場を 2 点間の距離に応じたスケールで粗視化することで．離れた空間点における場の値を変数として持つ 2 体系が定義できることになる．

場の粗視化による 2 体系の定義を用いて，ミンコフスキー時空でのスカラー場の真空状態に対するシンプレクティク固有値の振舞いを見てみよう．

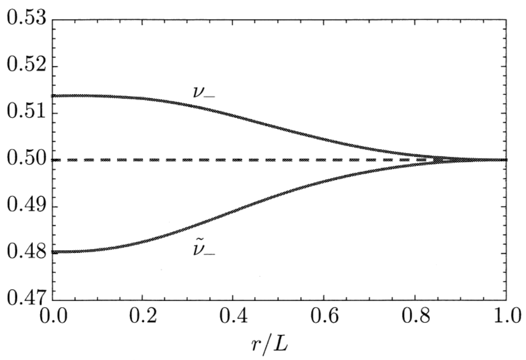


図 4　ミンコフスキー真空の量子場に対するシンプレクティク固有値の 2 点間距離依存性（$\hbar$ を単位とする）．L は系のサイズを表す．

図 4 は 2 点間距離とシンプレクティク固有値の関係を与えている．2 体系が分離できる必要十分条件は $\tilde{\nu}_- \geq \hbar/2$ であったから，図の $\tilde{\nu}_-$ の振舞いはミンコフスキー真空が分離可能ではない，つまりエンタングルしていることを意味している．それではどの程度の強さでエンタングルしているのだろうか？ エンタングルメントの強さに対してはいくつかの指標があるが，ここではシンプレクティク固有値を用いてただちに計算可能な**ネガティビティ**（ログネガティビティ）

$$E_N \equiv -\min\left[\log_2(2\tilde{\nu}_-/\hbar), 0\right] \tag{14}$$

を用いる．この量は蒸溜可能なエンタングルメントの上限値を与えることが知られている[7]．この定義によれば系が分離可能であるときは $E_N = 0$，エンタングルしているときは $E_N = -\log_2(2\tilde{\nu}_-/\hbar) > 0$ であり，$\tilde{\nu}_-$ が $\hbar/2$ から下にずれるほどよりエンタングルメントが強くなる．ミンコフスキー真空の場に対しては，2 点間距離が小さいほどエンタングルメントが強く（量子相関が強い），またどの距離に対してもエンタングルメントがゼロとはならない．つまりミンコフスキー真空の場は常にエンタングルしている．

5. 初期ゆらぎのエンタングルメントと古典性

インフレーション宇宙での量子場のエンタングルメントをミンコフスキー真空の場合と同じ方法で調べてみよう．図 5 は 2 点間の距離（物理的距離）に対するシンプレクティク固有値の値である．

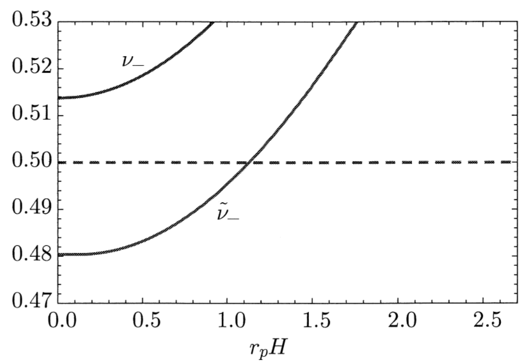


図 5　インフレーション宇宙の量子場に対するシンプレクティク固有値の 2 点間距離依存性（$\hbar$ を単位とする）．大スケール $r_p \gtrsim H^{-1}$ において $\tilde{\nu}_-$ は $\hbar/2$ の値を超える．

2 点間距離が小さいときは $\tilde{\nu}_-$ は $\hbar/2$ より小さく点 A における場と B における場はエンタングルしている．これは，ミンコフスキー真空の場合と同じ振舞いである．ところが 2 点間距離を大きくしてゆくと，ハッブル長さ H^{-1} を超えたあたりで $\tilde{\nu}_-$ は $\hbar/2$ より大きくなり，2 体系 AB は分離可能となる．以上の振舞いをネガティビティを用いて言い直してみる（図 6）．2 点間距離が小さい場合には（ハッブル長さ H^{-1} より短い距離），ネガティビティの値はゼロではなく，これはミンコ

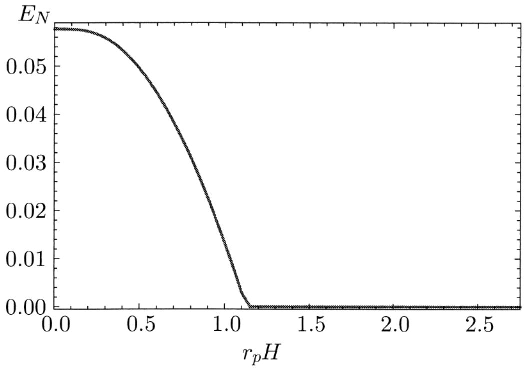


図6 インフレーション宇宙の量子場に対するネガティビティの2点間距離依存性.

フスキー真空と同じように量子場はエンタングルしていることを意味する．2点間距離が十分に大きい場合には（ハッブル長さ H^{-1} より長い距離）ネガティビティの値はゼロとなっており，このスケールで見る限り量子場は分離可能なエンタングルメントがない状態である．大スケールにおいて分離可能な状況が現れることがインフレーション宇宙における量子場の振舞いの大きな特徴である．ハッブル長さを超える大スケールにおいて量子ゆらぎは量子論固有の特性であるエンタングルメントを失い，古典ゆらぎと同じように振る舞い得ることを意味する．量子ゆらぎの古典化を通じて初期ゆらぎを作り出すというインフレーションのシナリオにとって，この性質は非常に都合がよく，エンタングルメント（量子相関）の観点から，量子ゆらぎの古典化を裏付けたことになっている．

6. おわりに

量子場に対する2体間エンタングルメントを評価する手段は，ここで紹介した場を粗視化する方法以外にも考えられる．より観測的（測定的）な状況に沿った手法としては，内部自由度を持つ2つの検出器を場と相互作用させることで，場が持っているエンタングルメントを2つの検出器間のエンタングルメントに移し替える方法がある（エンタングルメント・スワッピング）．初期に2つの検出器を分離可能な状態に用意する．検出器を場と相互作用させたのちに，2つの検出器がエンタングルした状態になっていれば，これは場が保有するエンタングルメントを検出器が読み取ったことに対応する．なぜなら局所的操作と古典的通信を組み合わせるだけでは，エンタングルメントは生成されないからである．この方法を用いてミンコフスキー真空がエンタングルしていることは確かめられており[8]，インフレーション宇宙での量子場に対しても2つの検出器間の距離がハッブル長さ H^{-1} 以下の場合のみ，場のエンタングルメントが検出可能であるとの結果を得ている[9]．

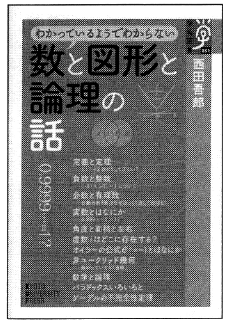
現時点においては，宇宙初期ゆらぎのエンタングルメントの振舞いを測定する具体的な観測はないが，もし将来的にそのような観測測定が実現可能となれば，初期宇宙および重力自身の量子状態についてのより深い理解が可能となることが期待できる．

参考文献

1) この問題に対するレビューとしては C. Kiefer and D. Polarski, *Adv. Sci. Lett.* **2**, 164 (2009) (arXiv: 0810.0087); M. Genovese, *Adv. Sci. Lett.* **2**, 303 (2009); E. Martin-Martinez and N.C. Menicucci, *Class. Quantum Grav.* **29**, 22403 (2012) (arXiv: 1204.4918).
2) D. Polarski and A.A. Starobinsky, *Class. Quantum Grav.* **13**, 377 (1996).
3) 朝永振一郎「光子の裁判」，所収：『量子力学と私』，江沢洋編，岩波文庫（1997）；『物理学への道程』，江沢洋編，みすず書房（2012）；そのもとは「基礎科学」，弘文堂（1949年11, 12月号）.
4) J.S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).
5) R. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2726 (2000); L. Duan, G. Giedke, J.I. Cirac and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2722 (2000).
6) Y. Nambu and Y. Ohsumi, *Phys. Rev. D* **80**, 124031 (2009).
7) M. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 090503 (2005).
8) B. Reznik, A. Retzker and J. Silman, *Phys. Rev. A* **71**, 042104 (2005).
9) Y. Nambu and Y. Ohsumi, *Phys. Rev. D* **84**, 044028 (2011); Y. Nambu, *Entropy* **15**, 1847 (2013).

（なんぶ・やすさだ，名古屋大学大学院理学研究科）

わかっているようで わからない 数と図形と論理の話



西田吾郎著，四六判，288 頁，本体 1800 円，京都大学学術出版会

自然数は古代文明が成立した頃に発見され，お金の計算などに使われた．しかし，現実世界には，3 羽の鳥や 5 匹の犬はいても 3 や 5 という数はなく，1, 2, 3, 4, 5,$\cdots$ と無限に続く自然数列もなく，自然数の発見は，人類文明を支える大発見であった．その後，0 や負の数が発見されるまでには，さらに何千年もの時間がかかり，発見が容易ではなかったことが分かる．この様に，小学校で習う整数の性質についても，自明でないものが色々ある．例えば，この本にある「なぜ $(-1)\times(-1)=1$ となるのか？」という問いに小学生が分かる様に答えることは，数学科の学生にとっても容易ではない．「分数とは何か？」という問いも難しく，そのことが「分数が計算できない大学生」を生む背景にある．

また，我々は長さや面積を測るのに実数を使っているが，「実数とは何か？」と聞かれると，正確に答えるのは非常に難しい．高等学校の数学では，数直線を考えることにより，「直線上の点と対応するのが実数である」と教えるが，それでは「直線上にはどの様な点があるか？」ときかれると，やはり答えるのは難しい．ほとんどの日本人は，有理数以外の実数としては，整数の平方根，円周率，ネピアの数くらいしか知らないのではないだろうか？ 実数全体はどの様な性質を持っているかははっきりしているが，我々が認識できる実数は，その中のごく一部に過ぎないということが実数を理解する際の難しさの背景にある．

現在，数学（数理科学）は科学と技術の基礎として現代社会にとって必要不可欠なものとなっており，理系の大学生なら，文字式や極限の計算はできるが，「文字式とは何か？」，「なぜ微分積分学は重要であるか？」，「無限小や無限大の数を考えても良いか？」などと問われると，正しく答えられる人はごく一部であろう．

数学では背理法を使うが，日常生活では背理法は成り立たない．では「なぜ，数学では背理法を使っても良いのか？」と聞かれると，数学者以外のほとんどの人は答えられないのではないか．答えは，数学は正しいか，正しくないかのどちらかが決まる命題を扱うからであり，そのため，数学基礎論で「数学の公理系が無矛盾である」とは，その体系の中ではある命題とその否定命題が同時に証明されることはないことをいう．

この様に，数学では普通簡単に通りすぎているところでも，真剣に考えると，とても難しいことが幾つもあり，通常の学校教育を受けてもその様なことは教えて貰えないが，この本ではその様な問題を取り上げ，分かりやすく解説している．

この本で取り上げられている問題としては，以上の他に，定義と定理の違い，弧度法を使う理由，面積の定義[*1)]，複素数とは何か，オイラーの公式の意味，ユークリッドの平行線公理を満たさない幾何学などがあり，最後に，様々なパラドックス[*2)] とゲーデルの不完全性定理[*3)] について解説をしている．

数学を深く理解したい人に，読むことをお勧めしたい本である．

森田　康夫（東北大学教養教育院）

*1） 複雑な図形の面積を定義するのは容易ではない．

*2） 数学と関連したものとしては，ゼノンのパラドックス「足の速いアキレスは亀に追いつけるか？」や，ラッセルのパラドックス「$X=\{x|x$ は x を含まない$\}$ と置くとき，X は X を含むか？」などがあり，それらについてもこの本では説明している．

*3） 「自然数論を含み，無矛盾な数学の体系には，正しいが証明できない命題がある」というものである．

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

細井　勉

1984年1月号



数学は頭でするものだ，頭だけあればよいのだ，そんなことが日本の数学界であたかも公理のように囁かれていた時期がありました．コンピュータが実用化しはじめた頃のこと，もう大昔の話です．30年前頃というのは，その時代からだいぶ経っていますが，コンピュータが小さく，また安くなりはじめた時期です．急に，数学者もコンピュータを使いはじめました．「公理」が破棄されたように見えました．そんな時期に，帰納的な計算ができると便利だと書きました．数学自体が帰納的な手法で構築されていたからです．実際上の計算では，「場合分け」の処理のほうが難題でした．木構造をした場合分けの中にうまく道を見つける工夫が必要でした．

そんな内容の講義の後で，ある学生が言いにきました．孫悟空の分身の術があればよいのですね，と．うまい理解をする学生だなと思いました．帰納も，場合分けも，分身が作れればよいだけのことです．分身に個々の仕事を任せて，併行的にやってもらえばよいわけです．ただ，その実現はたいへんです．

ところで，分身は，当然，物理的にある大きさをもつことでしょう．すると，そのうちに全宇宙空間が分身で埋められてしまうという問題が生じます．限りなく場合分けが生じるかもしれないからです．いずれにしても，理屈の上の話にすぎません．

横でこの話を聞いていた別の学生が，「そのうち」というのは数時間とか数分程度だろうという計算をしてくれました．核爆弾よりも恐ろしい「計算」になろうということです．もっとも，コンピュータがいくら高速になっても，宇宙的な規模での情報のやりとりをしていたら，膨大な時間がかかるはずなので，そんな短時間のうちに宇宙が分身で一杯になることはなかろう，という学生もいました．幸いにも，分身を作る技術はまだ完成されていないようです．

考えてみると，コンピュータ紀元元年頃に公理のようだったものは，西暦紀元前のユークリッドの時代に，すでに，生まれていたようです．ユークリッドは定規とコンパスを基礎におき，「作図」という具体的な手法の上に幾何学を構築しました．と言っても，作図された図形を観察したのではなかったのです．図形は，単に，思考の助けとして使っただけで，補助的な道具でした．今のコンピュータの役割に近いものです．正確に描く必要もなく，手書きのいい加減な図でも十分でした．ただ，図を描く手順が問題となるのです．そのような幾何学は，そして数学は，ユークリッドの時代から今に至るまで，頭だけでやってきているのです．「頭でやる」数学は今も生きているようです．

（ほそい・つとむ）

大学院入試問題からみた 大学の数学

数学のより深い理解を目指す

第11回

確率の問題

不確実な現象をとらえる

海 老 原　円・太 田　雅 人

11.1 数え上げと確率

今回は確率の問題を取り上げる．確率という概念は，不確実な現象を記述する手段として，我々の社会に深く浸透している．もちろん，大学院入試にも登場する．ただ，確率の関与する領域は非常に広く，また深いので，ここでは焦点をしぼり，理工系の学生がある程度共通の素養として持っていると期待される基本的な部分，特に**数え上げの問題の延長としての確率の問題**を取り扱うことにする．

問題 11.1（東京大学大学院新領域創成科学研究科複雑理工学専攻，平成 20 年度）
1 から 5 までの数値の書かれた 5 枚のカードを裏向きに置く．プレーヤは，1 のカードが出るまで無作為に 1 枚ずつカードを表向きに返していくゲームを行う．ゲームの得点は表向きにしたカードの数値の総和とする．たとえば，$3 \to 4 \to 1$ の場合の得点は $3+4+1=8$ 点となる．以下の問に答えよ．

（問 1） n $(1 \leq n \leq 5)$ 枚目に 1 のカードが出る確率 p_n を求めよ．

（問 2） $n-1$ 枚目までは 1 以外のカードで n 枚目に 1 のカードが出る条件付確率 q_n を求めよ．ただし，$2 \leq n \leq 5$ とする．また，q_5 の値を求めよ．

（問 3） 3 枚目に 1 のカードが出る場合であっても，獲得される得点は必ずしも同じではない．このとき，獲得できる各得点に対してその得点が得られる確率を求め，表にせよ．

（問 4） 得点の期待値を数値で求めよ．

解答例　（問 1）$1 \leq n \leq 5$ なるすべての n に対して，$p_n = \dfrac{1}{5}$ である．

実際，問題文の中で与えられた「1 のカードが出るまで無作為にカードを表向きにして数値の和を得点とする」というゲーム（これを**ゲーム A** とよぶことにする）の代

わりに，次のような「ゲーム B」を考える．

ゲーム B：「5 枚のカードを裏向きのまま無作為に 1 枚ずつ取り出し，それを取り出した順に左から一列に並べ，そのあとで一斉に表に返し，いちばん左のカードから 1 のカードまでの数値の和を得点とする．」

ゲーム A とゲーム B は互いに等価な試行である．ゲーム B では，結局，5 枚のカードを無作為に並べ替えることになるので，1 のカードが n 番目にくる確率はどれも等しく，$\dfrac{1}{5}$ である．

別解　1 番目に 1 のカードを引く確率 p_1 は $\dfrac{1}{5}$ である．2 番目のカードが 1 であるためには，1 番目のカードが 1 でなく（その確率は $\dfrac{4}{5}$），かつ，2 番目のカードが残りの 4 枚の中の特定の 1 枚であること（その条件つき確率は $\dfrac{1}{4}$）が必要十分であるので，

$$p_2 = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

である．同様に考えれば

$$p_3 = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}, \quad p_4 = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5},$$
$$p_5 = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{5}$$

が得られる．

（問 2）　文章の意味が少しとりづらいが，「$n-1$ 枚目までのカードが 1 以外であった」という条件のもとで，「残りの $5-(n-1)$ 枚の中から 1 のカードを選ぶ」という条件つき確率が問われている．したがって，$q_n = \dfrac{1}{6-n}$ である．特に $q_5 = 1$ である．

（問 3）　i 番目のカードの数値を a_i と表すことにする（$1 \leq i \leq 5$）．3 番目のカードの数値が 1 であるとき，得点は $a_1 + a_2 + 1$ であるが，その最小値は $2+3+1=6$，最大値は $4+5+1=10$ である．a_1 と a_2 の組合せは全部で $4 \times 3 = 12$ 通りある．

得点が 6 となるのは，$(a_1, a_2) = (2,3), (3,2)$ の 2 通りである．得点が 7 となるのは $(a_1, a_2) = (2,4), (4,2)$ の 2 通りである．得点が 8 となるのは $(a_1, a_2) = (2,5)$, $(3,4), (4,3), (5,2)$ の 4 通りであり，得点が 9 となるのは $(a_1, a_2) = (3,5), (5,3)$ の 2 通り，得点が 10 となるのは $(a_1, a_2) = (4,5), (5,4)$ の 2 通りである．a_1 と a_2 の組合せは等しい確率で起こるので，求める確率を表にすれば次のようになる（「1 のカードを 3 番目に引いた」という条件のもとで，それぞれの得点を得る条件つき確率を問うているのか，「1 のカードを 3 番目に引き，かつ，その得点になった」という確率を聞いているのか，判然としないので，両方書いておく）．

得点	6	7	8	9	10
条件つき確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
確率	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$

（問 4）　1 枚目に 1 を引いた場合，得点は 1 である．2 枚目に 1 を引いた場合，その

条件のもとで，a_1 の値が 2, 3, 4, 5 となる確率がそれぞれ $\frac{1}{4}$ であるので，得点の期待値は

$$3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{4}=\frac{9}{2}$$

である．また，問 3 の結果を用いれば，3 枚目に 1 を引いたという条件のもとでの得点の期待値は

$$6\times\frac{1}{6}+7\times\frac{1}{6}+8\times\frac{1}{3}+9\times\frac{1}{6}+10\times\frac{1}{6}=8$$

である．4 枚目に 1 を引く場合は，残り 1 枚のカードが 2, 3, 4, 5 のいずれかであるかに応じて，得点が 13, 12, 11, 10 のいずれかになるので，得点の期待値は

$$(13+12+11+10)\times\frac{1}{4}=\frac{23}{2}$$

となる．5 枚目に 1 を引いた場合の得点は 15 である．したがって，求める得点の期待値は

$$\left(1+\frac{9}{2}+8+\frac{23}{2}+15\right)\times\frac{1}{5}=8$$

である．

別解（対称性を利用した解法）　次のようなゲーム C を考える．

ゲーム C：「5 枚のカードを裏向きのまま無作為に 1 枚ずつ取り出し，それを取り出した順に左から一列に並べ，そのあとで一斉に表に返し，いちばん**右**のカードから 1 のカードまでの数値の和を得点とする．」

5 枚のカードの数値の合計は 15 であるので，左から 1 のカードまでの数値の和を k，右から 1 のカードまでの数値の和を l とするとき，$l=16-k$ である．したがって，ゲーム B において得点が k である確率を r_k とすれば，それはゲーム C において得点が $16-k$ である確率と等しい．

一方，ゲーム C において，カードを一斉に表に返す前に，それらのカードの**並びを逆にする**（つまり，**時系列を反転させる**）という操作を加えれば，それはゲーム B と等価になるので，ゲーム C において得点が $16-k$ である確率は，ゲーム B において得点が $16-k$ である確率と等しい．

以上の考察より，$r_k=r_{16-k}$ が成り立つことが分かる．

いま，求める期待値を E とすると

$$E=\sum_{k=1}^{15}kr_k \tag{11.1}$$

であるが，$r_k=r_{16-k}$ に注意し，$l=16-k$ とおけば，$k=16-l$ であるので

$$E=\sum_{k=1}^{15}kr_{16-k}=\sum_{l=1}^{15}(16-l)r_l \tag{11.2}$$

が得られる．式 (11.2) の右辺において l をあらためて k とおきなおし，式 (11.1) と式 (11.2) とを辺々加えれば

$$2E = \sum_{k=1}^{15}\{k + (16-k)\}r_k = \sum_{k=1}^{15} 16r_k = 16\sum_{k=1}^{15} r_k = 16$$

となるので $E = 8$ が得られる． **解答終わり**

11.2 条件つき確率

ある事象 A が起こったという条件のもとで事象 B が起こる確率は**条件つき確率**とよばれる．この概念はすでに前問にも出てきていたが，ここで条件つき確率を主たるテーマとした問題を取り扱うことにする．

問題 11.2（東京工業大学大学院理工学研究科土木工学専攻，平成 21 年度） ベイズ（Bayes）の定理に関する以下の問いに答えよ．

(a) 標本空間 Ω において，事象 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が互いに排反であり，$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$ ならば，任意の事象 B に対して

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$$

が成立することを示せ．ただし，$P(A_i) =$ 事象 A_i の確率，$P(A_i|B) =$ 事象 B を条件とする事象 A_i の条件付確率である．

(b) 形の同じ 3 枚のカードがある．1 枚目のカードは両面が白，2 枚目のカードは両面が赤，3 枚目のカードは片面が白で片面が赤である．今，3 枚のカードから 1 枚を選んで机の上においたところ，カードの表は赤であった．このとき，裏が白である確率を上記 (a) を利用して求めよ．

解答例 (a) $P(A_i \cap B) = P(A_i|B)P(B) = P(B|A_i)P(A_i)$ より

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} \tag{11.3}$$

である．一方，$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ であり，$i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$ であることより，$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$ であり，$i \neq j$ ならば $(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \emptyset$ であることが分かる．したがって

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j) \tag{11.4}$$

となる．式 (11.4) を式 (11.3) に代入すれば求める関係式が得られる．

(b)「選んだカードが i 枚目のものである」という事象を A_i とすると，$P(A_i) = \dfrac{1}{3}$ である（$i = 1, 2, 3$）．また，「選んだカードの表が赤である」という事象を B とすると，$P(B|A_1) = 0,\ P(B|A_2) = 1,\ P(B|A_3) = \dfrac{1}{2}$ である．このとき，(a) より

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} = \frac{1}{3}$$

となり，これが求める条件つき確率である．「選んだカードの表が赤である」という前提のもとで，「選んだカードの裏が白である」ことは，「選んだカードが 3 枚目のものである」ことと同値であるからである． **解答終わり**

一般に，2 つの事象 A, B に対して，$P(A|B)$ と $P(A)$ は等しいとは限らない．事象 B が起こったことによって，事象 A の起こる確率が変化するかもしれないからである．そのような変化が生じないとき，すなわち，$P(A|B) = P(A)$ が成り立つとき，事象 A と B とは互いに**独立である**という．次の問題の小問 (3) までは，試行の独立性をテーマにしている．

問題 11.3（名古屋工業大学大学院工学研究科，平成 20 年度）公正なサイコロを k 個投げる．このとき次の事象について (1) から (4) までの問いに答えよ．解答は導出過程も示すこと．

事象 A：目の合計が偶数である．

事象 B：目の合計が 3 の倍数である．

事象 C：すべて 3 より大きな目である．

(1) 事象 A の確率 $P(A)$ を求めよ．

(2) $k = 5$ のとき，事象 C の下での事象 A の条件付確率 $P(A|C)$ を求めよ．

(3) 事象 B と事象 C が独立であることを示せ．

(4) 一回の試行で，目の合計+ボーナス点の得点が得られるとする．ここで，ボーナス点は事象 A に当てはまる場合 +100 点，事象 B で +3 点，事象 C で −12 点（減点）とする．2 つ以上当てはまるときはボーナス点が加算される．このとき得点の期待値を求めよ．

解答例 (1) サイコロを k 個投げたときに出る目の組合せ全体の集合（**標本空間**）を Ω_k とすると，$\#(\Omega_k) = 6^k$ であり，事象 A, B, C は Ω_k の部分集合である．ここで，有限集合 X に対して $\#(X)$ は X に属する元の個数を表すものとする．

いま，$a_k = \#(A)$ とおく．$k = 1$ のとき，$a_1 = 3$ である．実際，1 から 6 までの整数のうち，偶数は 2, 4, 6 の 3 つである．また，$k \geq 2$ のとき，k 個のサイコロの目の和が偶数であることは，「$(k-1)$ 番目までのサイコロの目の和が偶数であり，かつ，k 番目のサイコロが偶数である」か，または，「$(k-1)$ 番目までのサイコロの目の和が奇数であり，かつ，k 番目のサイコロが奇数である」ということと同値であるので

$$a_k = 3a_{k-1} + 3(6^{k-1} - a_{k-1}) = \frac{1}{2} \cdot 6^k$$

が得られる．したがって，任意の k に対して $P(A) = \dfrac{a_k}{6^k} = \dfrac{1}{2}$ である．

(2) ひとまず一般の k に対して考察する．$\#(C) = 3^k$ である．$a'_k = \#(A \cap C)$，$p_k = P(A|C)$ とおくと，$p_k = \dfrac{a'_k}{3^k}$ である．

$k = 1$ については，$a'_1 = 2, p_1 = \dfrac{2}{3}$ である．実際，4, 5, 6 のうち，偶数は 4 と 6 の 2 つである．$l \geq 1$ なる l に対して，小問 (1) と同様に考えれば

$$a'_{l+1} = 2a'_l + 1 \cdot (3^l - a'_l) = 3^l + a'_l$$

が成り立つことが分かる．そこで，両辺を 3^{l+1} で割って，さらに $\dfrac{1}{2}$ を引けば

$$p_{l+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}p_l - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_l - \frac{1}{2}\right)$$

となる．よって

$$p_k = \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{2} = \frac{3^k+1}{2\cdot 3^k}$$

が得られる．したがって特に $p_5 = \dfrac{122}{243}$ である．

(3) $b_k = \#(B)$ とおく．また，「目の合計が 3 で割って 1 余る」という事象を F，「目の合計が 3 で割って 2 余る」という事象を G とし，$f_k = \#(F)$, $g_k = \#(G)$ とおく．$k=1$ については，$b_1 = f_1 = g_1 = 2$ である．また，小問 (1) と同様に考えれば，$k \geq 2$ のとき

$$b_k = 2b_{k-1} + 2f_{k-1} + 2g_{k-1} = 2(b_{k-1} + f_{k-1} + g_{k-1}) = 2\cdot 6^{k-1} = \frac{1}{3}\cdot 6^k$$

となることより，任意の k に対して $P(B) = \dfrac{1}{3}$ であることが分かる．

一方，$b'_k = \#(B\cap C)$, $f'_k = \#(F\cap C)$, $g'_k = \#(G\cap C)$ とおくと，4, 5, 6 を 3 で割った余りを考えれば，$b'_1 = f'_1 = g'_1 = 1$ が得られる．また，$k \geq 2$ のときは

$$b'_k = 1\cdot b'_{k-1} + 1\cdot f'_{k-1} + 1\cdot g'_{k-1} = 3^{k-1} = \frac{1}{3}\cdot 3^k$$

となることより，任意の k に対して $P(B|C) = \dfrac{1}{3}$ であることが分かる．

よって，$P(B) = P(B|C)$ が成り立つので，事象 B と事象 C は独立である．

(4) 一般に $X_1, X_2, \cdots, X_m$ が確率変数のとき，定数 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ に対して

$$E\left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i E(X_i)$$

が成り立つことを用いる．ここで $E(X)$ は確率変数 X の**期待値**を表す．

いま，求める得点の期待値を E とし，サイコロの目の合計の期待値を E' とするとき，上に述べたことより

$$E = E' + 100P(A) + 3P(B) - 12P(C)$$

が成り立つ．そこで E' を 2 通りの方法で求める．

方法 1　k 個のサイコロの目の合計を確率変数 Y とし，i 番目のサイコロの目を確率変数 Y_i $(1 \leq i \leq k)$ とすれば，$Y = \sum_{i=1}^{k} Y_i$ であるので，再び上に述べたことより

$$E' = E(Y) = \sum_{i=1}^{k} E(Y_i)$$

が成り立つ．i 番目のサイコロの目は 1 から 6 まで等しい確率で出るので，

$$E(Y_i) = (1+2+3+4+5+6)\times\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

である．よって $E' = \dfrac{7}{2}k$ である．

方法 2　サイコロの目が x であるとき，その裏の目は $7-x$ である．k 個のサイコロの目の合計が y であるとき，その裏の目の合計は $7k-y$ である．したがって，問題 11.1（問 4）の別解と同様にして対称性の考察をすれば，サイコロの目の合計が y である確率と $7k-y$ である確率が等しいことより，$E' = \dfrac{7}{2}k$ となることが分かる．

いずれにせよ，$P(A)=\dfrac{1}{2}$, $P(B)=\dfrac{1}{3}$, $P(C)=\dfrac{3^k}{6^k}=\dfrac{1}{2^k}$ より

$$E=\frac{7}{2}k+100\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{3}-12\times\frac{1}{2^k}=\frac{7}{2}k-\frac{3}{2^{k-2}}+51$$

が求める期待値である．　　**解答終わり**

11.3 確率の推移を表す行列

今までは，数え上げの問題の延長としての確率の問題を取り扱ってきたが，最後に，行列によって**確率の推移を記述する**問題を考えることにする．

> **問題** 11.4　(東京大学大学院工学系研究科環境海洋工学専攻（当時），平成 20 年度）
> A 製品と B 製品の所有者が，次のように製品を買い換えるものとする．A 製品の所有者が，買い換えの際に，そのまま A 製品を選択する確率が α $(0<\alpha<1)$，B 製品を選択する確率が $1-\alpha$，B 製品の所有者のうち，B 製品を選択する確率が β $(0<\beta<1)$，A 製品を選択する確率が $1-\beta$ である．このとき，次の問いに答えよ．
>
> (1)　初めに A 製品を所有していた人が 2 回目の買い換え後に B 製品を所有している確率を求めよ．
>
> (2)　初めに A 製品を所有していた人が n 回目の買い換え後に B 製品を所有している確率を求めよ．

解答例　n 回目の買い換え後に A 製品を所有している確率を a_n とし，n 回目の買い換え後に B 製品を所有している確率を b_n とする．$n=0$ のときは初期状態を表すものとする．初めに A 製品を所有しているので $a_0=1$, $b_0=0$ である．

このとき $k\geq 0$ なる k に対して

$$\begin{cases} a_{k+1}=\alpha a_k+(1-\beta)b_k, \\ b_{k+1}=(1-\alpha)a_k+\beta b_k \end{cases}$$

が成り立つ．ここで，$A=\begin{pmatrix} \alpha & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta \end{pmatrix}$ とおけば，$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$ であるので，

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11.5}$$

が成り立つ．

(1) $A^2=\begin{pmatrix} \alpha^2+(1-\alpha)(1-\beta) & (\alpha+\beta)(1-\beta) \\ (\alpha+\beta)(1-\alpha) & \beta^2+(1-\alpha)(1-\beta) \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2+(1-\alpha)(1-\beta) \\ (\alpha+\beta)(1-\alpha) \end{pmatrix}$$

であるので，求める確率は $(\alpha+\beta)(1-\alpha)$ である．

(2) A の特性多項式を $\Phi_A(t)$ とすると，

$$\Phi_A(t)=\begin{vmatrix} t-\alpha & \beta-1 \\ \alpha-1 & t-\beta \end{vmatrix}=(t-1)(t-\alpha-\beta+1)$$

であるので，A の固有値は $1, \alpha+\beta-1$ である．$0<\alpha<1, 0<\beta<1$ より $1 \neq \alpha+\beta-1$ となる．$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} 1-\beta \\ 1-\alpha \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ は，それぞれ固有値 $1, \alpha+\beta-1$ に対する固有ベクトルである．そこで

$$P=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)=\begin{pmatrix} 1-\beta & 1 \\ 1-\alpha & -1 \end{pmatrix}$$

とおくと，P は正則行列であり，$P^{-1}=\dfrac{1}{2-\alpha-\beta}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-\alpha & \beta-1 \end{pmatrix}$ である．実際，$2-\alpha-\beta>0$ である．このとき，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta-1 \end{pmatrix}$ であることより

$$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\alpha+\beta-1)^n \end{pmatrix}$$

となり，

$$A^n=P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\alpha+\beta-1)^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

が得られるので，前述の式 (11.5) を用いて b_n が求まる．実際に計算すれば

$$b_n=\frac{(1-\alpha)\{1-(\alpha+\beta-1)^n\}}{2-\alpha-\beta}$$

となる．これが求める確率である．　**解答終わり**

上の解答例において，行列 A は確率の推移を表している．このような行列の成分は非負の実数であり，各列の成分の和が 1 である．ここでクイズを出しておこう．

クイズ　2 つの n 次正方行列 A, B が，ともに成分が非負実数であり，各列の成分の和が 1 であるならば，積 AB もそのような性質を持つことを示せ．

行列 A, B が確率の推移を表しているとき，積 AB は推移の合成を表すと考えられる．証明は行列の成分を計算することによって容易にできる．

11.4 終わりに

今回は確率の問題を取り扱った．冒頭にも述べたように，確率の関わることがらは多岐にわたるので，ここでは基本的な問題のみを考察した．

次回はベクトル解析の問題を取り扱う．

（えびはら・まどか，埼玉大学大学院理工学研究科）
（おおた・まさひと，東京理科大学理学部）

階層構造を持つ双対平坦空間

甘利 俊一

今回は双対平坦空間の階層構造を論ずる．多くのシステムは階層構造を持つ．例えば時系列の AR モデルや MA モデルは，その次数に応じて階層構造をなし，低次のシステムは高次のシステムに順次含まれる．マルコフ連鎖もこの例で，低次マルコフモデルは高次のモデルの部分であり，一番下に独立分布のモデルが来る．今回は脳科学への応用，特に神経パルスの相関の階層構造に焦点を当てることで，情報幾何における階層構造を明らかにする[1)]．

今回注目するのは多数の要素からなるシステムで，要素の絡み合いの階層構造である．n 個のニューロンからなる集団を考えよう．各ニューロンは，発火するか静止かで，1 か 0 の 2 値を取る．このとき，集団の発火パターンの確率分布を考える．分布を指定するパラメータは，各ニューロンの発火率（発火頻度）と，異なるニューロン間の絡み合いを表す量に分けられる．絡み合いは，2 個のニューロンの間に生ずる相関，3 個のニューロン間の相互作用，さらに高次の相互作用と次々に分解できて，最高次のすべてのニューロンの交互作用に至る[2)]．高次の交互作用が 0 であれば，低次の交互作用のみを含む分布になる．したがって，高次の作用を含む全空間から順に低次の部分空間へと包含関係が進む，階層的な構造をしている．階層的な作用を直交分解できないだろうか．情報幾何はこの問いに回答を与える．

ニューロンの発火以外にも，面白い例として産業連関表がある．産業間の関連を正値の配列とみなそう．このときに，各産業別の産出量と 2 つの産業の相互依存関係（交互作用）を直交に分解し，産業構造が時代とともにどう変わっていくのか，そのトレンドを見ることができる[3)]．

27.1 階層双対平坦空間

空間 S が双対平坦であれば，アファイン座標系 $\boldsymbol{\theta} = \left(\theta^1, \cdots, \theta^n\right)$ と，対応する双対アファイン座標系 $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$ を取ることができる．S の各点で接空間を考えれば，この 2 つの座標系の自然基底は

$$\boldsymbol{e}_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial \theta^i}, \quad \boldsymbol{e}^i = \partial^i = \frac{\partial}{\partial \eta_i} \tag{27.1}$$

である．これらは陪直交基底をなし，

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}^j \rangle = \delta_i^j \tag{27.2}$$

である．添字の上下によって，θ-系か η-系かを区別していることに注意．

今仮に，$\boldsymbol{\theta}$ が k 個のブロックに分かれ，

$$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \cdots, \boldsymbol{\theta}_k) \tag{27.3}$$

となっているとしよう．$\boldsymbol{\theta}_1, \cdots, \boldsymbol{\theta}_k$ は k 個のサブベクトルで，各々はいくつかの成分からなっている．物理的な意味を考えたときに，$\boldsymbol{\theta}_j$ は何らかの意味で j 次の構造を表し，$j = 1, \cdots, k$ と構造が順に高次になるとすれば，これは階層システムである．とくに，最高次の $\boldsymbol{\theta}_k$ が 0 であれば，このシステムは $k-1$ 次以下の構造を持ち，$\boldsymbol{\theta}_k$ と $\boldsymbol{\theta}_{k-1}$ が 0 ならば $k-2$ 次以下の構造を持つ．低次のものは高次のものの部分空間をなし，だんだんと階層が下がっていく．

神経集団の興奮パターンの確率モデル

一般論を続ける前に例を見よう．n 個のニューロンからなる集団で，各ニューロンの状態は $x_i = 0, 1$ の 2 値を取るものとし，状態ベクトル

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \tag{27.4}$$

を考える．これはニューロン集団の発火パターンを表す．パターン $\boldsymbol{x}$ が生ずる確率分布 $p(\boldsymbol{x})$ を考える．確率分布 $p(\boldsymbol{x})$ の全体は，$N = 2^n - 1$ 次元の空間 S をなす．ここで，確率の対数を

$$\log p(\boldsymbol{x}) = \sum \theta^i x_i + \sum \theta^{ij} x_i x_j + \cdots + \theta^{1\cdots n} x_1 \cdots x_n - \psi \tag{27.5}$$

のように，$\boldsymbol{x}$ の多項式に展開する．$\boldsymbol{x}$ の各成分は 2 値であるから，これは n 次多項式で良い．ここからわかるように，確率分布族は係数 $\boldsymbol{\theta} = \left(\theta^i, \theta^{ij}, \cdots, \theta^{1\cdots n}\right)$，$(i = 1, \cdots, n; ij = 12, 13, \cdots, n-1, n \ (i \neq j); \cdots)$ を自然パラメータとする指数型分布族

$$p(x, \boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\sum \theta^i x_i + \sum \theta^{ij} x_i x_j + \cdots + \theta^{1\cdots n} x_1 \cdots x_n - \psi\right\} \tag{27.6}$$

であり，$\boldsymbol{\theta}$ をアファイン座標系とする双対平坦空間である．これは，対数線形モデルと呼ばれる．

ここで，$\boldsymbol{\theta}$ を次数に応じて分割し

$$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \cdots, \boldsymbol{\theta}_n); \tag{27.7}$$

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \left(\theta^1, \cdots, \theta^n\right), \ \boldsymbol{\theta}_2 = \left(\theta^{12}, \theta^{13}, \cdots, \theta^{n-1 n}\right), \cdots \tag{27.8}$$

としよう．するとこれは，次数に応じた階層システムをなす．

対応する双対アファイン座標を書けば，同様に

$$\boldsymbol{\eta} = (\eta_i, \eta_{ij}, \cdots, \eta_{1\cdots n}) \tag{27.9}$$

である．k 次のパラメータは

$$\eta_{i_1\cdots i_k} = E\left[x_{i_1}\cdots x_{i_k}\right] = \mathrm{Prob}\left\{x_{i_1}=1,\cdots,x_{i_k}=1\right\} \tag{27.10}$$

と書けるから，$\eta_{i_1\cdots i_k}$ は，$i_1,\cdots,i_k$ という k 個のニューロンの同時発火確率を表す．これも，階層構造に分けて

$$\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n); \tag{27.11}$$

$$\boldsymbol{\eta}_k = (\eta_{i_1\cdots i_k}),\ k = 1, 2, \cdots, n \tag{27.12}$$

と分解することができる．

27.2 混合座標系と直交葉層化

n 次階層モデルにおいて，ある次数 k を決めて，θ 座標を k 次より上の項と，k 次以下の項に分け，改めて

$$\boldsymbol{\theta} = \left(\boldsymbol{\Theta}_k; \boldsymbol{\Theta}^k\right); \tag{27.13}$$

$$\boldsymbol{\Theta}_k = (\boldsymbol{\theta}_1, \cdots, \boldsymbol{\theta}_k),\quad \boldsymbol{\Theta}^k = \left(\boldsymbol{\theta}^{k+1}, \cdots, \boldsymbol{\theta}^n\right) \tag{27.14}$$

と置く．これを θ 座標の k 次切断と呼ぶ．同様に対応する η 座標も切断し，

$$\boldsymbol{\eta} = \left(\boldsymbol{H}_k; \boldsymbol{H}^k\right); \tag{27.15}$$

$$\boldsymbol{H}_k = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_k),\quad \boldsymbol{H}^k = \left(\boldsymbol{\eta}^{k+1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}^n\right) \tag{27.16}$$

と置く．

この切断を使って 2 つの座標成分を組み合わせ，新しい座標系

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{H}_k; \boldsymbol{\Theta}^k\right) = \left(\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_k; \boldsymbol{\theta}^{k+1}, \cdots, \boldsymbol{\theta}^n\right) \tag{27.17}$$

を作ってみよう．これを k 次混合座標系と呼ぶ．混合座標系において，その後半の θ 座標を一定値 $\boldsymbol{c}$ に束縛して，

$$\boldsymbol{\Theta}^k = \boldsymbol{c} \tag{27.18}$$

という部分空間を考える．$\boldsymbol{c}=0$ ならば，$k+1$ 次以上の相互作用のないモデルである．これらは明らかに e 平坦な部分空間である．これを

$$E_k(\boldsymbol{c}) = \left\{\boldsymbol{\xi} \,\middle|\, \boldsymbol{\Theta}^k = \boldsymbol{c}\right\} \tag{27.19}$$

と書こう．$\boldsymbol{c}$ をいろいろに変えれば，平坦な部分空間 $E_k(\boldsymbol{c})$ は全体で空間 S を埋め尽くし，オーバーラップはない（図 27.1）．すなわち，

$$S = \bigcup_{\boldsymbol{c}} E_k(\boldsymbol{c}),\quad E_k(\boldsymbol{c}) \cap E_k(\boldsymbol{c}') = \phi,\quad \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{c}' \tag{27.20}$$

である．このように，空間を重ならない部分空間の集まりに分割することを葉

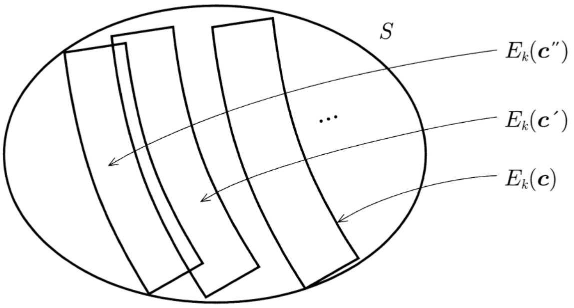


図 27.1　S の葉層化.

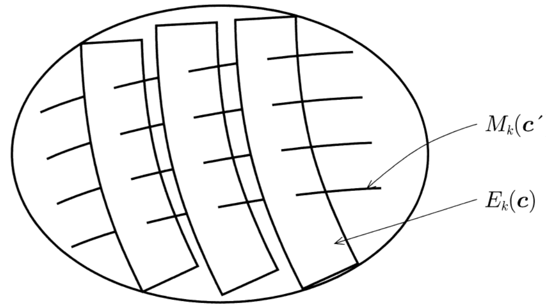


図 27.2　S の双対直交葉層化.

層化と言う.

一方，混合座標系の前の部分 $\boldsymbol{H}_k$ を一定値 $\boldsymbol{c}$ に固定した部分空間

$$M_k(\boldsymbol{c}) = \{\boldsymbol{\xi}\,|\boldsymbol{H}_k = \boldsymbol{c}\} \tag{27.21}$$

を考えれば，これは双対平坦（m 平坦）な部分空間である．$\boldsymbol{c}$ を変えて得られる部分空間の全体も S を埋め尽くすから，これはもう一つの葉層化である．しかも，$E_k(\boldsymbol{c})$ と $M_k(\boldsymbol{c}')$ とは直交していて，必ず一点で交わる．その交点は混合座標で $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{c}'; \boldsymbol{c})$ となる点である（図 27.2）.

定理 27.1　双対平坦空間は，その階層構造に応じた双対直交葉層化が可能である.

Fisher 情報量を混合座標系で測れば，E_k と M_k の直交性から

$$g_{ij} = \left[\begin{array}{c|c} g_H & 0 \\ \hline 0 & g_\Theta \end{array}\right] \tag{27.22}$$

のように部分対角行列になる.

2 点 P, Q 間の KL ダイバージェンスを調べよう．それぞれの混合座標を

$$\boldsymbol{\xi}_P = (\boldsymbol{H}_P; \boldsymbol{\Theta}_P), \tag{27.23}$$

$$\boldsymbol{\xi}_Q = (\boldsymbol{H}_Q; \boldsymbol{\Theta}_Q) \tag{27.24}$$

と置く．Q 点を通り，高次の $\boldsymbol{\Theta}$ を Q 点での値 $\boldsymbol{\Theta}_Q$ に固定した平坦な部分空間 $E_k(Q)$ を考え，P 点をここに射影（e 射影）してみよう．このとき，射影した点 R_{PQ} の混合座標は

$$\boldsymbol{\xi}_{PQ} = (\boldsymbol{H}_Q; \boldsymbol{\Theta}_P) \tag{27.25}$$

となる（図 27.3）．一方，Q 点を通り，低次の $\boldsymbol{H}$ は Q 点での値 $\boldsymbol{H}_Q$ に等しく固定した双対平坦な部分空間 $M_k(Q)$ を考え，P 点をここに双対射影（m 射影）する．このとき得られる点 R_{QP} の混合座標は

$$\boldsymbol{\xi}_{QP} = (\boldsymbol{H}_P; \boldsymbol{\Theta}_Q) \tag{27.26}$$

である（図 27.3）．このとき P と R_{PQ} とを結ぶ双対測地線は，R_{PQ} と Q を結ぶ測地線と直交している．また，P と R_{QP} とを結ぶ測地線は，R_{QP} と Q

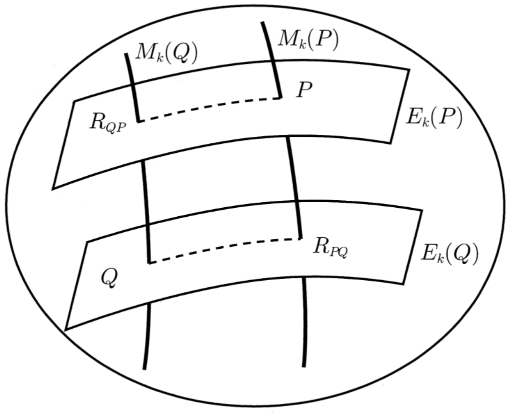


図 27.3　KL ダイバージェンスの分解.

を結ぶ双対測地線と直交している．したがって，ピタゴラスの定理により次が成立する．

定理 27.2　P, Q の 2 点が与えられたとき，そのダイバージェンスは，部分空間 E_k 内，および部分空間 M_k 内のダイバージェンスの和に分解できる，

$$D[P:Q] = D[P:R_{PQ}] + D[R_{PQ}:Q], \tag{27.27}$$

$$D[Q:P] = D[Q:R_{QP}] + D[R_{QP}:P] \tag{27.28}$$

この定理は，P, Q の 2 点間のダイバージェンスは，$\boldsymbol{H}_k$ の違いに起因する部分と $\boldsymbol{\Theta}^k$ の違いに起因する部分との和に分解できることを示している．一様分布 P_0 は，$p(\boldsymbol{x}) =$ 一定 であるから，(27.6) から，アファイン座標は $\boldsymbol{\theta} = 0$ となり，S における θ 座標の原点を示す．この点はエントロピーを最大にする分布でもある．点 P から P_0 へのダイバージェンスは

$$D[P:P_0] = \sum p(\boldsymbol{x}) \log p(\boldsymbol{x}) - \sum p(\boldsymbol{x}) \log p_0(\boldsymbol{x}) \tag{27.29}$$

と書けるから，定数項を $c = -\log p_0(\boldsymbol{x})$ として，これは P 点のエントロピーと

$$H[P] = -D[P:P_0] + c \tag{27.30}$$

で結ばれている．ここで，$Q = P_0$ と置くと，$E_k(P_0) = E_k(0)$．これより次の定理が成立する．

定理 27.3　P を $E_k(P_0)$ に射影して得られる点は，同じ H_k を持つ分布の中でエントロピーを最大にする．

高次の $\boldsymbol{\theta}_k$ を順に 0 と置く階層的な平坦なモデルの系列

$$E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n \tag{27.31}$$

を考えよう．ここで $E_k, k = 0, \cdots, n$ は

$$E_k = \left\{ \boldsymbol{\xi} \,\middle|\, \boldsymbol{\Theta}^k = 0 \right\} \tag{27.32}$$

とする．点 P を E_k に m 射影した点を

$$P_k = \prod\nolimits_k P \tag{27.33}$$

と置く．P_k の ξ 座標は P の座標 $\left(\boldsymbol{H}_k; \boldsymbol{\Theta}^k\right)$ から $\boldsymbol{\Theta}^k = \left(\boldsymbol{\theta}^{k+1}, \cdots, \boldsymbol{\theta}^n\right)$ を 0 としたもの，すなわち $(\boldsymbol{H}_k; 0)$ で，低次の効果のみを残したものである．

P 点が与えられたときに，これを順に E_k に射影してみる．すると，$P = P_n$ としてダイバージェンスの分解定理から，

$$D\left[P : P_0\right] = \sum_{k=1}^{n} D\left[P_k : P_{k-1}\right] \tag{27.34}$$

が得られる．これをエントロピーの分解と見れば，分布 P のエントロピーは，非一様性に起因する部分と，高次の効果をダイバージェンスで測った部分とに階層的に分解できる．

27.3 神経スパイクの情報幾何

神経集団の発火パターンの確率は (27.6) 式のように展開できた．この時の η 座標は，階層的に表現して

$$\boldsymbol{\eta}_k = E\left[X_k\right], \quad X_k = \left(x_{i_1} \cdots x_{ik}\right) \tag{27.35}$$

で，これがいろいろな k 個のニューロンの同時発火確率を表す．

ここでわかりやすい例として 2 個のニューロンの場合をまず考えよう．$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ は 2 次元で，その発火確率は $\boldsymbol{x}$ の 4 個の発火パターンに応じて $p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}$ の 4 個からなる．ここで，

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1 \tag{27.36}$$

であるから，未知のパラメータは実質 3 個で，空間 S は 3 次元である．この空間に，独立な確率分布 $p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}$ の全体からなる部分多様体 $E(0)$ を考えよう．ここでは $\theta^{12} = 0$ である．$E(0)$ の内部で各ニューロンの発火率は自由に決められるから，これは 2 次元の部分空間である．ニューロン間の発火が独立でなくて相関があれば，分布はこの部分空間を飛び出す．その度合いが 2 個のニューロンの相互作用の強さである．これまで，相互作用の度合いを表す量として共分散

$$\sigma^2 = E\left[x_1 x_2\right] - E\left[x_1\right] E\left[x_2\right] = \eta_{12} - \eta_1 \eta_2 \tag{27.37}$$

を用いることが多かった．しかし，望ましい相互作用の度合いは，発火率に直交していて欲しい．ここで混合座標 $\left(\eta_1, \eta_2; \theta^{12}\right)$ を用いれば，発火率の座標 η_1, η_2 と相互作用 θ^{12} が直交に分解できる．確率の言葉でいえば，両者の変化に対応するスコア $(\partial / \partial \xi_i) \log p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ が η_i と θ^{12} の間で無相関になる．

$$E\left[\frac{\partial}{\partial \eta_i} \log p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial \theta^{12}} \log p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})\right] = 0. \tag{27.38}$$

この性質は，発火率に関する推論と交互作用に関する推論が分離できることを

示し，望ましい性質の一つである．混合座標は p_{ij} を用いて

$$\eta_1 = E[x_1] = p_{10} + p_{11}, \quad \eta_2 = E[x_2] = p_{01} + p_{11}, \quad \theta^{12} = \log \frac{p_{11}p_{00}}{p_{01}p_{10}} \tag{27.39}$$

となっている．

3 個のニューロンの場合を考えよう．各ニューロンの発火率 $\boldsymbol{\eta}_1$ に直交する座標は，$\boldsymbol{\Theta}^2 = (\boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\theta}_3)$ であった．これは，2 次と 3 次の交互作用からなる．各ニューロンの発火率だけでなくニューロンの対（3 個ある）の同時発火率 $\eta_{ij} = E[x_i x_j]$ を固定し，これら全部に直交する座標軸を定めると，これが

$$\theta^{123} = \log \frac{p_{111}p_{100}p_{010}p_{001}}{p_{110}p_{101}p_{011}p_{000}} \tag{27.40}$$

である．これは，各ニューロンの発火率と対の同時発火率を固定したとき，これらに直交して変化する確率分布の方向を示す．2 個の同時確率分布が変わらないのだから，2 次の交互作用は変わらず，変わるのは 3 個のニューロン間の固有の交互作用である．したがって，θ^{123} は 3 次の，θ^{ij} は 2 次の交互作用を表すといってよい．

この議論を続けていけば，n 個のニューロンの場合に $\theta^{i_1 \cdots i_k}$ は k 次の交互作用を表すといってよい．これを k 切断を用いて述べよう．まず，$k=1$ である．このとき，混合座標は

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{\eta}_1; \boldsymbol{\theta}^2, \cdots, \boldsymbol{\theta}^n\right) \tag{27.41}$$

となる．これから明らかなように，$\boldsymbol{\Theta}^1 = \left(\boldsymbol{\theta}^2, \cdots, \boldsymbol{\theta}^n\right)$ は，発火率を示す $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{\eta}_1$ に直交する座標系である．すなわち，発火率に直交する方向に相互作用を変えれば，その変化は $\boldsymbol{\Theta}^1$ で表せる．次は，$k=2$ とする

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{H}_2; \boldsymbol{\Theta}^2\right) \tag{27.42}$$

を考えると，$\boldsymbol{H}_2 = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2)$ は，各ニューロンの発火率 $\boldsymbol{\eta}_1$ と 2 個のニューロンの同時発火率 $\boldsymbol{\eta}_2$ からなる．したがって，各ニューロンの発火率と 2 個のニューロンの同時発火率に直交する方向の変化は 2 次以上の交互作用を示すことになる．ここから，$\boldsymbol{\theta}^2$ は発火率に直交する 2 次の交互作用，$\boldsymbol{\theta}^3$ は 3 次の交互作用を示すことが分かる．以下同様で，$\boldsymbol{\theta}^k$ は，k 次の交互作用を表す．これは，展開式からも明らかであるが，$\boldsymbol{\Theta}^k$ と $\boldsymbol{H}_k$ とが任意の k について直交するところが有用である[2)]．これが双対直交葉層化[1)]に他ならない．

確率分布 P に対して，ここから一様分布までのダイバージェンスは (27.29) により P のエントロピーと関係している．E_k はこの場合 k 次以上の相互作用 $\boldsymbol{\Theta}^k$ を 0 にした部分多様体である．P を E_k に射影して得られる

$$P_k : \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_k; 0) \tag{27.43}$$

は，k 個以下のニューロンの同時発火率はそのままにして，P から k より大きい次数の交互作用を取り去ったものである．ダイバージェンスは

$$D[P:P_0] = D[P:P_k] + D[P_k:P_0] \tag{27.44}$$

と分解できるが，$D[P:P_k]$ は k 次以上の交互作用の大きさを計ったものと言

える．さらに，ダイバージェンスを細かく

$$D_k = D\left[P_k : P_{k-1}\right] \tag{27.45}$$

と分解すれば，D_k は k 次の交互作用の大きさと言うことができる．エントロピーは，これを用いて，

$$H[P] = \sum H\left[X_i\right] - \sum_{k=2}^{n} D_k \tag{27.46}$$

のように分解できる．つまり，D_k は非一様性を表すエントロピーに対する k 次の交互作用の寄与を表している．

27.4 産業連関表の情報幾何

情報幾何は経済学へも応用されているが，それほど面白いものは見当たらなかった．しかし，最近になって，森岡涼子と津田宏治の優れた論文を見つけた[3)]．ここにそのアイデアを紹介したい．

産業連関表とは，産業毎にどの分野の生産物がどの分野へどれだけ売られたか，その取引を表にまとめたもので，国の産業の構造を表す．これはマクロ経済の実態を表すもので，古くは，かのマルクスもこれにより経済の分析を行う提案をしている．産業連関表は産業分野を n 個に分けて，これをもとに作る $n \times n$ 行列 $A = (A_{ij})$ のことで，その i, j 成分 A_{ij} は産業 i の生産物が産業 j へ引き渡された量（価格ベース）を表す．ここで A_{ij} は正とする．これは n^2 次元の正測度の空間 $\boldsymbol{R}^{n^2}$ の要素であるから，双対平坦の情報幾何構造をここに導入できる．行列 A の双対ポテンシャル関数を

$$\varphi(A) = \sum_{i,j} \left(A_{ij} \log A_{ij} - A_{ij}\right) \tag{27.47}$$

で導入しよう．$A = (A_{ij})$ は行列 A の η 座標になる．このとき，A の θ 座標 L_{ij} は

$$L_{ij} = \frac{\partial \varphi(A)}{\partial A_{ij}} = \log A_{ij} \tag{27.48}$$

であり，対応するポテンシャル関数は

$$\psi(L) = \sum \exp\left\{L_{ij}\right\} \tag{27.49}$$

である．ここから得られるダイバージェンスは，2 つの行列 A, B の間で

$$D[A:B] = \sum B_{ij} \log \frac{B_{ij}}{A_{ij}} - \sum B_{ij} + \sum A_{ij} \tag{27.50}$$

となる．

しかし，アファイン座標系はアファイン変換の範囲で自由に取れる．それならば，産業の構造を分かりやすく示すような座標系を取りたい．構造で目につくのは，行列 A の列和と行和で，行和

$$A_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \tag{27.51}$$

は産業 i の総生産量，列和

$$A_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} \tag{27.52}$$

は産業 j の総消費量を表す．これを m アファイン座標の一部として用いよう．

なお，

$$A_{\cdot\cdot} = \sum_{i} A_{i\cdot} = \sum_{j} A_{\cdot j} \tag{27.53}$$

が成立する．行列 A の最後の第 n 行と n 列を $(A_{i\cdot}, A_{\cdot j}, A_{\cdot\cdot})$ で置き換える変換は A_{ij} のアファイン変換である．置き換えた表を $\tilde{A}_{ij}$ としよう．これに対応したアファイン座標系 $\tilde{L}_{ij}$ は，変換の不変性 $\sum A_{ij}L_{ij} = \sum \tilde{A}_{ij}\tilde{L}_{ij}$ より求まり，

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{ij} &= L_{ij} - L_{in} - L_{nj} + L_{nn} \\ &= \log \frac{A_{ij}A_{nn}}{A_{in}A_{nj}}, \quad i,j = 1, \cdots, n-1\end{aligned} \tag{27.54}$$

$$\tilde{L}_{in} = L_{in} - L_{nn}, \tag{27.55}$$

$$\tilde{L}_{nj} = L_{nj} - L_{nn}, \tag{27.56}$$

$$\tilde{L}_{nn} = L_{nn} \tag{27.57}$$

のように書ける．ただし，i, j は 1 から $n-1$ までである．

上記の変換に対応して混合座標系

$$\boldsymbol{\xi} = \left(A_{i\cdot}, A_{\cdot j}, A_{\cdot\cdot}; \tilde{L}_{ij}\right), \quad i, j = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{27.58}$$

を作る．このとき，$\tilde{L}_{ij}$ は周辺和 $A_{i\cdot}, A_{\cdot j}$ に直交する e 座標系である．したがって，$\tilde{L}_{ij}$ は各産業の産業別生産額，購買額に関係せず，産業 i, j 間の関連の強さを示す量である．2 つの産業連関表 A, B の違いを表すダイバージェンス $D[A:B]$ は，周辺和の違いによる部分と交互作用の違いによる部分に直和分解できる．

ただ，$\tilde{L}_{ij}$ は第 n 産業を基準にした量であって，全産業間で対称でない．第 k 産業を基準とすると，連関の強さは

$$\tilde{L}_{ij}^{(k)} = \log \frac{A_{ij}A_{kk}}{A_{ik}A_{kj}} \tag{27.59}$$

となる．これを基準 k について平均した

$$S_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tilde{L}_{ij}^{(k)} = \log \frac{A_{ij}\bar{A}_{\cdot\cdot}}{\bar{A}_{i\cdot}\bar{A}_{\cdot j}}, \tag{27.60}$$

$$\bar{A}_{i\cdot} = (A_{i1} \cdots A_{in})^{\frac{1}{n}}, \tag{27.61}$$

$$\bar{A}_{\cdot j} = (A_{1j} \cdots A_{jn})^{\frac{1}{n}}, \tag{27.62}$$

$$\bar{A}_{\cdot\cdot} = (A_{11} \cdots A_{nn})^{\frac{1}{n}}, \tag{27.63}$$

を用いると，これは各産業について対称である．

構造をそのままにして，各産業の生産額 $A_{i\cdot}$ を変えるには，A_{ij} を $\mu_i A_{ij}$ にすればよい．すると，列和が $\mu_i A_{i\cdot}$ に変わる．同様に購入額の分布を変えるには，A_{ij} を $\lambda_j A_{ij}$ にする．これを合わせた変換

$$A_{ij} \to \mu_i \lambda_j A_{ij} \tag{27.64}$$

を RAS 変換という．明らかに，S_{ij} は RAS 変換に対して不変である．したがって，

$$(A_{i\cdot}, A_{\cdot j}, A_{\cdot\cdot}; S_{ij}) \tag{27.65}$$

という分解が構造を調べるのに有用である．ただし，$(A_{i\cdot}, A_{\cdot j})$ は (27.53) を満たさなければならないから，冗長な表現であるし，S_{ij} も真の自由度は $(n-1)^2$ である．この表現で，2 つの産業関連表 A, B の違いを表す $D[A:B]$ は，周辺和に起因する部分と S に起因する部分に直和分解できるわけではない．ただし $(A_{i\cdot}, A_{\cdot j}, S_{ij})$ から A_{ij} への変換式は陽に表せず，数値計算に頼ることになる．

S_{ij} を変えずに行和と列和を変えるには，λ_i と μ_j を定数として，A_{ij} を $\mu_i \lambda_j A_{ij}$ にすればよい．これで行和，列和が好きなように変えられる．これが S_{ij} に直交する m 平坦接空間をなす．周辺和を固定して，S_{ij} のみを変えるのは，行和および列和が 0 となる行列 Z_{ij} を用いて，A_{ij} を $A_{ij} + Z_{ij}$ にすればよい．これが A の空間で周辺和を示す座標軸に直交する m 平坦な部分空間を与える．

産業連関表を作る作業は，きわめて労力を要するため，通常は数年おきにしか本格的なものは作れない．しかし，列和および行和は簡単で毎年出る．そこで，産業間の連関の構造は仮に不変であるとして，前年の S をそのまま使って，今年の行和，列和から，今年の A を作ることができる．これが RAS として知られる方法である．ただ，5 年のブランクがあれば，S も変わる．5 年前の S_{ij} と現在の S'_{ij} を用いてこの 5 年間の A_{ij} を知るには，S_{ij} と S'_{ij} を e 測地線で結ぶ線形補完で中途の年次の $S_{ij}(t)$ を計算し，これを調査のできている各年次周辺和 $A_{i\cdot}(t)$ と $A_{\cdot j}(t)$ を用いると復元できる．調査のできている各年次と合わせることで，中途年次の A_{ij} が推定できる．

森岡と津田はこれを過去の日本の経済に適用し，バブル期において産業構造がどう変わっていったかを具体的に考察している[3)]．大変面白い分析である．ただし，彼等の分析では S_{ij} の代わりに，計算の簡単な

$$T_{ij} = \log \frac{A_{ij}}{A_{i\cdot} A_{\cdot j}} \tag{27.66}$$

を用いている．これも RAS 変換に不変である．T_{ij} は以下のように見ることもできる．$n \times n$ 行列 A_{ij} に余分の第 $n+1$ 行，$n+1$ 列を付け加えて，ここに列和 $A_{i\cdot}$，行和 $A_{\cdot j}$ を置く．この拡大した行列 $\tilde{A}_{ij}$ で，第 $n+1$ 行および列を基準に相互作用を求めれば

$$\tilde{S}_{ij} = \log \frac{A_{ij} \tilde{A}_{n+1\, n+1}}{A_{i\cdot} A_{\cdot j}} \tag{27.67}$$

が得られる．これは T_{ij} から総和 $A_{..}$ の対数を引いたものに等しい．ただし $\tilde{A}_{ij}$ には

$$A_{i\,n+1} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \tag{27.68}$$

などの制約が入っている．

終わりの一言

階層構造を持つモデルで，低次と高次の構造を直交分解できれば，話がすっきりする．例えば，2 次の交互作用と 3 次の交互作用を直交に分解できないものであろうか．仮に，2 次の作用がなくて 3 次だけであったとしよう．でも，2 変数は直接の交互作用を持たないものの，3 次の交互作用のせいで，独立にはならない．だから，3 次をどう定義すればよいかは，統計学でも大きな問題であった．情報幾何は，この問題にすっきりとした回答を与える．階層分解にかかわる双対直交葉層化は，最も美しい構造と言ってもよいだろう．うれしいことに，マクロ経済学の産業連関表の解析に，これが使える．このアイデアをもとに，この分野への応用がさらに進むことを期待したい．

参考文献

1) S. Amari, Information geometry on hierarchy of probability distributions, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol.**47**, No.5, pp.1701–1711, 2001.
2) H. Nakahara, S. Amari, Information-geometric measure for neural spikes, *Neural Computation*, **14**, pp.2269–2316, 2002.
3) 森岡涼子，津田宏治，産業連関表の情報幾何，電子情報通信学会技術研究報告 **110**, (476), pp.161–168, 2011.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

例題形式で探求する微積分学の基本定理
関数の性質から幾何構造を探る
第7回

曲面積 (1)

森田　茂之

今回から平面 $\mathbb{R}^2$ 上の区域の面積，および空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面の曲面積を取り上げる．これを基に，次々回から面積分の考察を始める．

7.1 面積と変数変換

平面 $\mathbb{R}^2$ の中の有界集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ の面積の定義は，2回目にすでに書いたが，その簡単な復習から始める．

$$\varphi_A(P) = \begin{cases} 1 & (P \in A), \\ 0 & (P \notin A) \end{cases}$$

により定義される A の定義関数 $\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が，A を含む十分大きな長方形 K 上の実数値関数として積分可能であるとき，A は**面積を持つ**というのであった．具体的には，小さな長方形 K_i による K の分割 $\Delta = \{K_i\}_i$ に対し

$$m_\Delta(A) = \sum_{K_i \subset A} \mathrm{Area}\, K_i \;\leq\; M_\Delta(A) = \sum_{K_i \cap A \neq \phi} \mathrm{Area}\, K_i$$

を考える．$m_\Delta(A)$ は A にすっかり含まれてしまう K_i たちの面積の総和であり，$M_\Delta(A)$ は A の点を少なくとも一つは含む K_i たちの面積の総和である．そして，等式

$$\sup_\Delta m_\Delta(A) = \inf_\Delta M_\Delta(A)$$

が成立するとき，A は面積

$$\mathrm{Area}\, A = \iint_K \varphi_A dxdy = \text{上記の値}$$

を持つというのである．長方形の中の有理点（x 座標 y 座標がともに有理数である点を有理点という）全体のなす集合のように，面積が定義されない有界集

合もある．一方，面積を持つ典型的な例として次の2つが挙げられる．一つは，有界閉区間 $[a,b]$ 上で定義された2つの連続関数 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ で，任意の点 $x\in[a,b]$ に対し不等式 $f(x)<g(x)$ をみたすものに対し，f,g のグラフに挟まれた区域

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x\in[a,b], f(x)\leq y\leq g(x)\}$$

であり，その面積は

$$\mathrm{Area}\,D=\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$$

により与えられる．もう一つは，区分的に C^1 級の単純閉曲線の内部である．

上記で $\mathbb{R}^2$ の替わりに $\mathbb{R}^3$，長方形の替わりに直方体とすれば，$\mathbb{R}^3$ の有界部分集合 A の体積 $\mathrm{Vol}\,A$ の定義が得られる．さらに一般に，$\mathbb{R}^n$ の有界部分集合 A の（n 次元）体積も定義される．

一般に具体的な積分の計算において，変数変換はきわめて重要な役割を果たす．1変数の場合の公式は，次の形になる．

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(u))g'(u)du.$$

ここで $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続関数であり，g は u を変数とする $\mathbb{R}$ の有界閉区間 $[\alpha,\beta]$ を含む開集合から，x を変数とする $\mathbb{R}$ の有界閉区間 $[a,b]$ を含む開集合への C^1 級の関数で，すべての点で $g'>0$ となるものである．ここで $g'(u)$ が現れる理由は，変数 x を新しい変数 u により $x=g(u)$ と表したとき，長さが（無限小の意味で）$g'(u)$ 倍されるからである．この事情は，上記を微分して得られる式 $dx=g'(u)du$ により表現される．次に記す2次元の変数変換の公式も同様の考えで導かれる．

定理 7.1（積分の変数変換公式） $A\subset\mathbb{R}^2$ を面積を持つコンパクト集合とし，$f:A\to\mathbb{R}$ を積分可能な関数とする．$g:U'\to U$ を（u,v を変数とする）$\mathbb{R}^2$ の開集合 U' から A を含む開集合 U の上への1対1の C^1 級写像で，その逆写像 $g^{-1}:U\to U'$ も C^1 級とする．このとき，$A'=g^{-1}(A)$ とおけば $f\circ g:A'\to\mathbb{R}$ は積分可能で

$$\iint_A f\,dxdy=\iint_{A'} f\circ g\,|\det Dg|dudv$$

となる．とくに，面積に関しては

$$\mathrm{Area}\,A=\iint_{A'}|\det Dg|dudv$$

となる．

ここで Dg は g の微分，$\det Dg$ はその行列式，すなわちヤコビアンを表す．具体的には，g が $g(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$ と表示されているとき

$$\det Dg=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

である．uv 平面から xy 平面に変換される際, 面積が（無限小の意味で）$|\det Dg|$ 倍されるのである．上記では2変数の場合の変数変換公式を記述したが，一般

の n 変数の場合も同様である.

例題 7.1 $\mathbb{R}^2$ の極座標への変数変換を用いて, 半径 a の球体 $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$ の体積 V を計算せよ.

解答 極座標は $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ により与えられる, したがって, そのヤコビアンは

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

となる. このとき求める体積は

$$\begin{aligned} V &= 2\iint_A \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy \\ &= 2\iint_{A'} \sqrt{a^2-r^2}\,rdrd\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr \\ &= 4\pi\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{4}{3}\pi a^3 \end{aligned}$$

となる. ただし, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq a^2\}$ であり, A' は $r\theta$ 平面の対応する区域を表す.

7.2 曲面積の定義

空間 $\mathbb{R}^3$ の中の曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ を考える. ここで曲面とは次の条件を満たすものを考える. S の任意の点 $\mathrm{P} \in S$ に対し, P のある開近傍 U と C^1 級の関数 $F : U \to \mathbb{R}$ が存在して

(i) $S \cap U = \{\mathrm{Q} \in U; F(\mathrm{Q}) = 0\}$,

(ii) 任意の点 $\mathrm{Q} \in S \cap U$ に対し, $F_x(\mathrm{Q}), F_y(\mathrm{Q}), F_z(\mathrm{Q})$ のどれか一つは 0 でない

となる. このとき, S の任意の点 $\mathrm{P}(a,b,c) \in S$ において接平面 T_{P} が存在し, その方程式は

$$F_x(\mathrm{P})(x-a) + F_y(\mathrm{P})(y-b) + F_z(\mathrm{P})(z-c) = 0$$

で与えられることが分かる. このような曲面は, 局所的には 2 変数関数のグラフとして表すことができる. 例えば, 点 $\mathrm{P}(a,b,c)$ において $F_z(\mathrm{P}) \neq 0$ ならば, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ を含むある区域 $A \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f : A \to \mathbb{R}$ が存在して, S は P の近くでは f のグラフ

$$\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)); (x,y) \in A\}$$

として表されることになる.

さてこのような曲面の面積の定義は, 曲線の長さの定義を 2 次元に一般化して得られると考えるのは自然である. しかし, ここで注意すべきことがある.

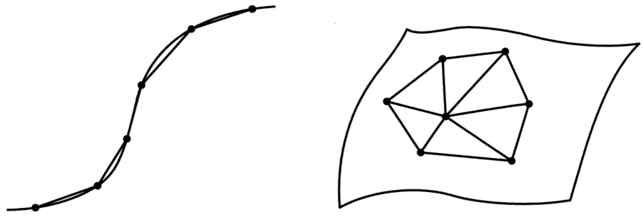


図 7.1　曲線と曲面の近似.

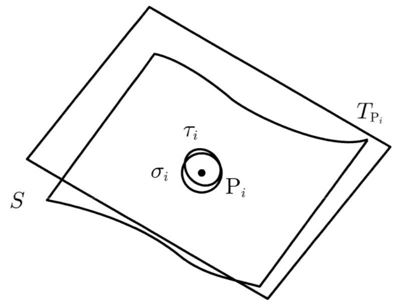


図 7.2　曲面積の定義.

図 7.1 を見てほしい．曲線の長さは，曲線上にいくつか分点を取ってできる折れ線の長さの，分点を細かくした極限として定義される．これを “素直” に曲面の場合に一般化すれば，次のようになるだろう．曲面上にいくつか分点をとり，それらを適宜結んでできる三角形の面積の総和を考え，分点を細かくした極限として曲面積を定義するのである．しかし，この考えはうまくいかないことが分かる．その理由は次のような 1 次元と 2 次元の違いにある．曲線の場合には，1 点 P に近づく点列 Q_n を取れば，2 点 P, Q_n を通る直線は n を大きくした極限において P における曲線への接線に近づく．ところが，曲面の場合には，1 点 P に近づく 2 つの点列 $\mathrm{Q}_n, \mathrm{R}_n$ を取り，3 点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}_n, \mathrm{R}_n$ を通る平面を考えたとしても，n を大きくした極限において P における曲面への接平面に近づくとは限らないのである．極端な場合には，直交してしまう場合さえある．詳しくは高木貞治著『解析概論』（改訂第 3 版）の 365–366 ページを参照してほしい．このことをふまえて，曲面積を次のように定義する．

実際には，上記のような曲面 S 上に与えられた，区分的に C^1 級の空間曲線で単純閉曲線となっているもので囲まれたコンパクトな区域（簡単のためこれを S と書くことにする）について $\mathrm{Area}\, S$ を定義するのである．図 7.2 を見てほしい．S を区分的に C^1 級の境界をもつ有限個の小区域 σ_i に分割し，その上の点 $\mathrm{P}_i \in \sigma_i$ を選ぶ．P_i における接平面 T_{P_i} への正射影による σ_i の像を τ_i とすれば，これは区分的に C^1 級の平面曲線で囲まれた区域となる．したがってそれは面積を持つ．そこで

$$\mathrm{Area}\, S = \lim_{|\sigma_i| \to 0} \sum_i \mathrm{Area}\, \tau_i$$

と定義する．ただし $|\sigma_i|$ は σ_i の直径，すなわち σ_i 上の 2 点間の距離の最大値を表す．

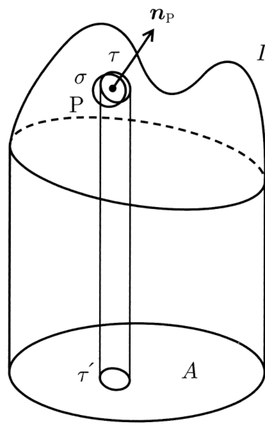


図 7.3　グラフで表される曲面の面積.

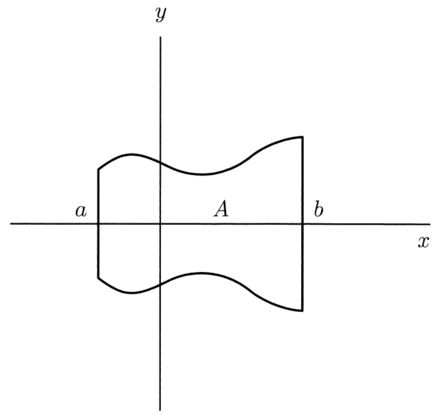


図 7.4　区域 A.

ここで，上記のように 2 変数関数 f のグラフとして表される曲面 Γ_f の面積の公式を記しておく．図 7.3 を見てほしい．Γ_f 上の 1 点 P における接平面を T_{P}，長さ 1 の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}_{\mathrm{P}}$ とする．T_{P} の方程式は $z-c=f_x(\mathrm{P})(x-a)+f_y(\mathrm{P})(y-b)$ で与えられるので

$$\boldsymbol{n}_{\mathrm{P}}=\left(\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)$$

となる．ただし，$f_x(\mathrm{P}),f_y(\mathrm{P})$ を簡単に f_x,f_y と書いた．$\boldsymbol{n}_{\mathrm{P}}$ と z 軸の正の方向とのなす角度を γ とすれば，$\boldsymbol{n}_{\mathrm{P}}$ の z 成分は $\cos\gamma$ となる．さて，P を含む曲面の小区域を σ，σ の T_{P} への正射影を τ，τ の xy 平面への正射影を τ' としよう．このとき

$$\mathrm{Area}\,\tau=\frac{1}{\cos\gamma}\,\mathrm{Area}\,\tau'=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{Area}\,\tau'$$

となる．曲面積は τ の面積の総和の極限として定義されることから，結局次の公式が導かれる．

公式 7.1（グラフで表される曲面の面積）

$$\mathrm{Area}\,\Gamma_f=\iint_A\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$$

例題 7.2（回転面の面積）　$\mathbb{R}^2$ 上の有界閉区間 $[a,b]$ 上で定義された C^1 級関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ のグラフ $\Gamma_f=\{(x,f(x));x\in[a,b]\}$ を考える．ただし，$f(x)\geq 0\ (x\in[a,b])$ とする．Γ_f を xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ において x 軸の回りを 1 回転して得られる回転面 R_f の面積を求めよ．

解答　回転面の方程式は

$$y^2+z^2=f(x)^2$$

で与えられる．この式から z を x,y の式として具体的に表し，それの x,y について偏導関数を計算することができる．しかし，より簡単に陰関数の微分の

考えを用いて計算する．両辺の微分を取れば

$$ydy + zdz = f(x)f'(x)dx$$

となる．この式から

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f(x)f'(x)}{z},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

が得られる．したがって，$\mathbb{R}^2$ の区域 A を $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in [a,b], -f(x) \leq y \leq f(x)\}$ により定めれば（図 7.4 参照），公式 7.1 を適用することにより

$$\begin{aligned}
\mathrm{Area}\, R_f &= 2\iint_A \sqrt{1 + \frac{f^2(f')^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}\, dxdy \\
&= 2\iint_A \frac{f\sqrt{1+(f')^2}}{\sqrt{f^2 - y^2}}\, dxdy \\
&= 2\int_a^b dx \int_{-f(x)}^{f(x)} \frac{f\sqrt{1+(f')^2}}{\sqrt{f^2-y^2}}\, dy \\
&= 2\int_a^b dx \left(f\sqrt{1+(f')^2} \left[\mathrm{Arcsin} \frac{y}{f(x)} \right]_{-f(x)}^{f(x)} \right) \\
&= \int_a^b 2\pi f \sqrt{1+(f')^2}\, dx
\end{aligned}$$

となる．

R_f および 2 つの平面 $x = a, x = b$ で囲まれた回転体 $\overline{R}_f$ の体積は

$$\mathrm{Vol}\, \bar{R}_f = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

により与えられる．

上記例題 7.2 の線積分の考えを用いた別解答を与える．

別解答　問題のグラフ $\Gamma_f = \{(x, f(x)\}; x \in [a,b]\}$ を平面曲線と考えれば，$x \in [a,b]$ をパラメータとする表示が与えられていると解釈できる．この曲線上の点 $(x, f(x)) \in \Gamma_f$ を 1 回転した円は R_f 上にあるが，その長さは $2\pi f(x)$ である．したがって，線積分の定義から容易に

$$\mathrm{Area}\, R_f = \int_{\Gamma_f} 2\pi f ds$$

となる．一方パラメータ x に関する速度は

$$\sqrt{(x')^2 + (f'(x))^2} = \sqrt{1+(f')^2}$$

である．したがって

$$\int_{\Gamma_f} 2\pi f ds = \int_a^b 2\pi f \sqrt{1+(f')^2}\, dx$$

となり，証明が終わる．

例題 7.3（**面積に関するギュルダンの法則**） 例題 7.2 の状況において，平面曲線 Γ_f の重心を (x_0, y_0) とする．このとき Γ_f の長さを l とすれば

$$\operatorname{Area} R_f = 2\pi y_0 l$$

となる．すなわち

回転面の面積 = 母線の重心が描く円周の長さ × 母線の長さ

となる．これを面積に関するギュルダンの法則という．これを証明せよ．

解答 重心の座標は

$$x_0 = \frac{1}{l}\int_{\Gamma_f} x ds, \quad y_0 = \frac{1}{l}\int_{\Gamma_f} y ds$$

で与えられる．したがって

$$\begin{aligned} 2\pi y_0 l &= 2\pi \int_{\Gamma_f} y ds \\ &= \int_{\Gamma_f} 2\pi f \sqrt{1+(f')^2}\, dx \\ &= \operatorname{Area} R_f \end{aligned}$$

となり，証明が終わる．

例題 7.4 xy 平面上の点 $(0, R) \in \mathbb{R}^2$ $(R > 0)$ を中心とする半径 r $(0 < r < R)$ の円を，xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ において，x 軸の回りを 1 回転して得られる図形 T を**トーラス**という（図 7.5 参照）．この図形の面積と，それが囲む区域 $\bar{T}$ の体積を求めよ．

解答 円の方程式は

$$x^2 + (y-R)^2 = r^2$$

より

$$y_{\pm} = R \pm \sqrt{r^2 - x^2} \quad （複号同順）$$

となる．ただし，y_+, y_- はそれぞれ円の上半分，下半分の弧を表す．一方，上

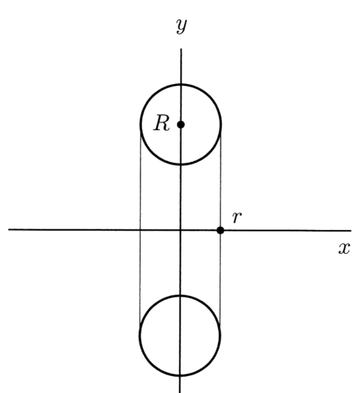


図 7.5 トーラス．

記を微分すれば

$$xdx + (y-R)dy = 0$$

より

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y-R}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}\, T &= 2\pi \int_{-r}^{r} (y_+ + y_-)\sqrt{1+\frac{x^2}{(y-R)^2}}\, dx \\ &= 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\, dx \\ &= 4\pi Rr \int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{1}{r^2-x^2}}\, dx \\ &= 4\pi^2 Rr\end{aligned}$$

となる．次に体積は

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\, \bar{T} &= \int_{-r}^{r} \pi \left(\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 - \left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 \right) dx \\ &= 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx \\ &= 2\pi^2 Rr^2\end{aligned}$$

となる．

上記のそれぞれの計算の最後の等式では，例えば変数変換 $x = r\cos t$ により容易に計算できる値

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{1}{r^2-x^2}}\, dx = \pi, \quad \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\pi r^2$$

を使った．

上記のように，トーラスの面積は $4\pi Rr = 2\pi R \times 2\pi r$ すなわち母線となる円の重心（すなわち中心）が描く円周の長さと，母線と成る円の長さの積に等しい．例題 7.3 のギュルダンの法則の定式化は，母線がグラフの形をしている場合を扱った．しかし，この例が示すように，実はもっと一般に成立する法則である．興味ある読者は，一般の形の定式化を試してみてほしい．

（もりた・しげゆき，東京大学・東京工業大学名誉教授）

2013年（1月号～12月号）総目次

Vol. 51, No. 595～Vol. 51, No. 606

■名著に親しむ

■連　載

特　集（2014年2月号予告）

利用する物理

基礎理論はいかに応用されるか

本体952円

特　集（2013年12月号）

物理学における存在とは

本体952円

編集後記

細谷先生や島田先生が記事で仰っているように「光子の裁判」では物理特有の“波”，“波動”という言葉は直接登場しません．時代が違えども物理をわかりやすく伝えたいという思いは変わらないものなのだなと感じます．また，本作はどのような動きを光子がしているのかということを読者に想像させ，量子力学のイメージが伝えられているのではないかと思います．

小誌は一足先に新年を迎えました．今年も物理や数学，およびそこで登場する様々な現象をイメージしやすいよう，伝えていきたいと思いますので，よろしくお願い致します．　(R)

＊　＊

小誌は一足先に新年を迎えました．本年もどうぞよろしくお願い申し上げます．

さて，今年最初の特集は朝永先生の著作「光子の裁判」を通して，波と粒子の二重性の不思議を取り上げました．現代的視点からの量子の不思議についての解説，実験から見た「光子の裁判」，レビュー・演劇で扱われたことの紹介などバラエティーに富んだ内容になっています．量子力学の不思議さや面白さ，科学の発展の様子がうかがえるかと思います．

お正月休みのお供にうってつけの一冊だと思いますので，楽しんで読んでいただけたら幸いです．　(T)

数　理　科　学　1月号

2014年1月1日発行

数理科学編集部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁